OBMEP - Novas Soluções para os Bancos de Questões

CONTEÚDO

$\boxed{1}$ ***Produto 2000*** *(Problema 68 do Banco)*

Quantos números naturais de cinco algarismos têm o produto de seus algarismos igual a 2000 ?

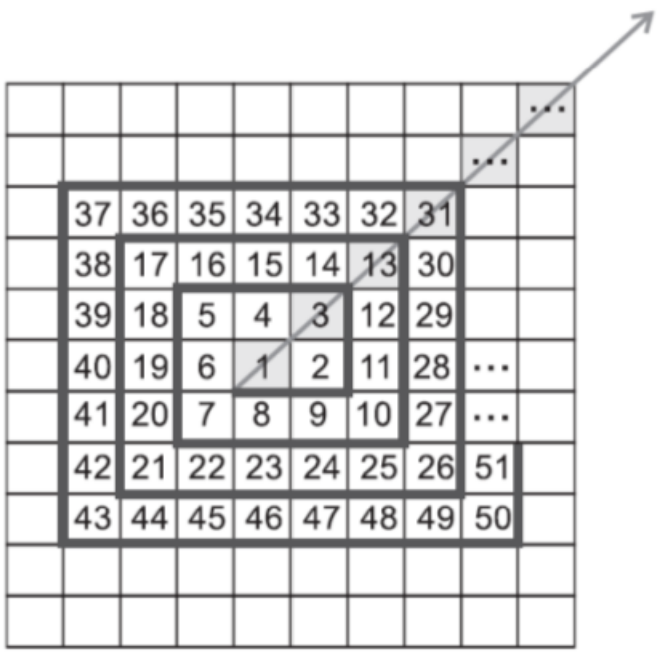
$\boxed{1}$ Solução Alternativa de Danny José Silva

Fatorando o número 2000, obtemos $2000 = 8 \times 5 \times 5 \times 5 \times 2$. Como cada algarismo não pode exceder 10 e os números procurados possuem 5 algarismos, temos dois casos a considerar:

1. Primeiro caso: Para $2000 = 8 \times 5 \times 5 \times 5 \times 2$, o número de inteiros com esses dígitos é dado por uma permutaçao com repetição $P = \dfrac{5!}{3!} = 20$ números.
2. Segundo caso: Para $2000 = 5 \times 5 \times 5 \times 4 \times 4$, o número de inteiros com esses dígitos é dado por uma permutaçao com repetição $P = \dfrac{5!}{2! \times 3!} = 10$ números.
   Portanto, existem $20 + 10 = 30$ números.

2 ***Paula escreve números*** *(Problema 13 do nível 3)*

Paula escreveu os números $1, 2, 3, \ldots$ em uma folha de papel quadriculado de acordo com o padrão indicado abaixo. Considerando a sequência $1, 3, 13, 31, \ldots$; qual é o $30°$ termo dessa sequência?



A) 3301 B) 3303 C) 3307 D) 3309 E) 3313

2 Solução Alternativa de Dirceu Borges

A partir da tabela, verificamos que o próximo termo da sequência é o número 57. Assim temos: $f_1 = 1$, $f_2 = 3$, $f_3 = 13$, $f_4 = 31$ e $f_5 = 57$. Para determinar o valor de f_{30} precisamos determinar a lei de formação da referida sequência f_n.

Observando a sequência dos números $1,3,13,31,57,\ldots$ percebemos o seguinte padrão:

$$1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+10} 13 \xrightarrow{+18} 31 \xrightarrow{+26} 57.$$

Notemos ainda que, a sequência $(2,10,18,26)$ é uma Progressão Aritmética de razão 8, cujo termo geral, a_n , é dado por: $a_n = 2+8(n-1) = 8n-6$. Dessa forma, a partir do padrão representado acima, observamos que:

$$1 \xrightarrow{+(8\cdot 1-6)} 3 \xrightarrow{+(8\cdot 2-6)} 13 \xrightarrow{+(8\cdot 3-6)} 31 \xrightarrow{+(8\cdot 4-6)} 57\ldots \xrightarrow{+(8\cdot(n-1)-6)} f_n.$$

Assim, podemos notar dois fatos interessantes:

1. Cada termo da sequência pode ser determinado apartir de seu termo anterior, pela seguinte fórmula de recorrência: $f_1 = 1$ e $f_{n+1} = f_n + (8n-6)$.

2. Cada termo da sequência pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{array}{rcl}
f_1 & = & 1 \\
f_2 & = & 1+(8\cdot 1-6) \\
f_3 & = & 1+(8\cdot 1-6)+(8\cdot 2-6) \\
f_4 & = & 1+(8\cdot 1-6)+(8\cdot 2-6)+(8\cdot 3-6) \\
 & \ldots & \\
f_n & = & 1+\underbrace{(8\cdot 1-6)+(8\cdot 2-6)+(8\cdot 3-6)\ldots(8\cdot(n-1)-6)}_{S}
\end{array}$$

A soma indicada por S, representa a soma dos termos de uma PA de razão 8, de $(n-1)$ termos, em que: $a_1 = 2$, $a_n = 8(n-1)-6$. Escrevendo essa soma de trás para frente,

$$S = [8\cdot(n-1)-6]+[8\cdot(n-2)-6]+[8\cdot(n-3)-6]+\ldots+(8\cdot 3-6)+(8\cdot 2-6)+(8\cdot 1-6).$$

Daí,

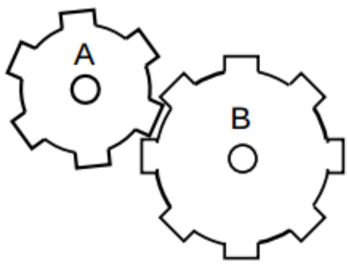
$$\begin{array}{rcl}
2S & = & (8n-12)(n-1) \\
S & = & \dfrac{(8n-12)(n-1)}{2} \\
 & = & (4n-6)(n-1)
\end{array}$$

Logo, a referida sequência, tem por lei de formação: $f_n = 4n^2-10n+7$. Assim, calculamos facilmente f_{30} :

$$f_{30} = 4\cdot 30^2 - 10\cdot 30 + 7 = 3307.$$

3 ***Engrenando*** *(Problema 4 do Nível 1)*

a) Na figura abaixo, são mostradas duas engrenagens encaixadas, uma engrenagem A com 6 dentes e outra engrenagem B com 8 dentes. Todos os dentes têm o mesmo tamanho. Se a engrenagem A der 12 voltas, quantas voltas dará a engrenagem B?



b) Considere 5 engrenagens encaixadas. A primeira tem 10 dentes, e está encaixada com uma segunda engrenagem com 20 dentes, que por sua vez está encaixada com uma terceira engrenagem que tem 40 dentes, que está encaixada com uma quarta engrenagem que tem 80 dentes, que por sua vez está encaixada com uma quinta engrenagem que tem 160 dentes. Quando a engrenagem maior der uma volta, qual a soma de voltas que serão dadas por todas as engrenagens?

c) Considere três engrenagens C, D e E, sendo que a engrenagem C está encaixada na engrenagem D e a engrenagem D está encaixada na engrenagem E. Cada uma delas tem uma certa quantidade de dentes, todos do mesmo tamanho. Sabe-se que quando a engrenagem C deu 160 voltas, a engrenagem D deu 1007 voltas, e a engrenagem E deu 38 voltas. Qual o menor número total de dentes das três engrenagens somadas para que isso possa acontecer?

3 Solução Alternativa de Adhonaldo Lopes Sousa

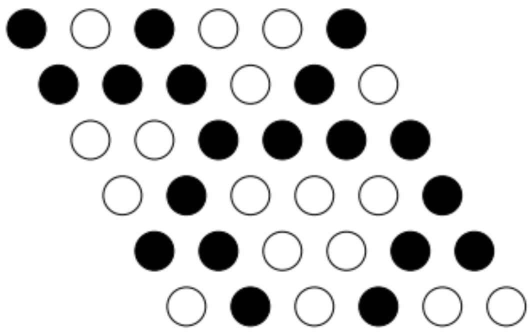
Uma resposta alternativa para o item *a*). Como as engrenagens estão na proporção de $6/8 = 3/4$, quando a engrenagem de 6 dentes der uma volta, a engrenagem de 8 realizará apenas $3/4$ de uma volta. Usando regra de três, temos:

6 Dentes	8 Dentes
1 Volta	3/4 Volta
12 Voltas	x Volta

Então, $x = 12 \cdot \dfrac{3}{4} = 9$.

4 ***Qual é a Pintura?*** *(Problema 5 do Nível 1)*

Seis círculos, pintados de preto ou branco, estão em fila. A cada passo, uma nova linha de seis círculos é desenhada abaixo e em diagonal. Os novos círculos da nova linha são pintados com uma certa regra simples, que só depende da linha anterior. Veja a figura abaixo e descubra qual é essa regra!



1. Como serão pintados os círculos da sétima linha?
2. Em algum momento todos os círculos de uma mesma linha estarão pintados de preto?
3. Como estarão pintados os círculos da linha de número 2014?

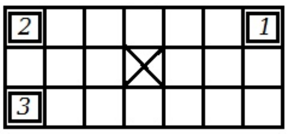
4 Solução Alternativa de Adhonaldo Lopes Sousa

Uma resposta alternativa para o item *c*). Observe que as linhas $3, 9, 15, 21, 27\ldots$ são iguais, obedecendo um ciclo a cada 6 linhas. Como 2013 é igual a soma de 3 e um múltiplo de 6, segue que as linhas 2013 e 3 são iguais. Assim, as linhas 4 e 2014 são iguais.

Correção: Na resolução que está no Banco de Questões, foi escrito que a linha 8 é igual à linha 3, no entanto, é a linha 9 que é igual à linha 3.

$\boxed{5}$ ***Empurrando bloquinhos*** *(Questão 17 do Nível 1)*

Um jogo de computador consiste de uma tela em forma de tabuleiro 3×7 no qual há três bloquinhos deslizantes 1, 2 e 3, ocupando quadradinhos 1×1. O jogo começa conforme a figura abaixo e cada jogada consiste em escolher um bloquinho e "empurrá-lo" na linha ou coluna. Após ser empurrado, um bloquinho irá parar apenas quando encontrar a borda do tabuleiro ou outro bloquinho. Por exemplo, se escolhermos o bloquinho 3, poderemos mandá-lo para o canto inferior direito ou para cima encontrando o bloquinho 2. Dois bloquinhos não podem ocupar o mesmo quadradinho e quando dois bloquinhos se chocam eles não continuam a se mover. O objetivo é fazer com que algum dos bloquinhos fique parado sobre a casinha marcada no centro do tabuleiro. Mostre como isso pode ser feito.



$\boxed{5}$ Solução Alternativa de Michel Brasil

Mova o bloquinho 2 ao encontro da 1 e o bloquinho 3 para a esquerda do bloquinho 2. Em seguida, envie o bloquinho 1 para a esquerda do bloquinho 3, como mostra a solução oficial. Repare que nesse momento o bloquinho 1 esta bem acima do centro do retângulo. Então podemos mandar o bloquinho 2 para baixo e depois para a esquerda, descer o bloquinho 3 e mandar o 2 ao encontro do 3 e, finalmente, ao encontro do 1. Assim, o bloquinho 2 estará no centro do tabuleiro com dois movimentos a menos que o descrito na solução oficial.

BANCO 2017

1 *Cubos e cola*

a) Um cubo $3 \times 3 \times 3$ foi construído com 27 cubos menores $1 \times 1 \times 1$. Para cada par de faces em contato de dois cubos é usado uma gota de cola. Quantas gotas de cola foram usadas ao todo?

b) Um cubo $10 \times 10 \times 10$ foi construído com 1000 cubos menores $1 \times 1 \times 1$. Para cada par de faces em contato de dois cubos é usado uma gota de cola. Quantas gotas de cola foram usadas ao todo?

1 Solução de Carlos Eduardo Pires da Silva

a) Os 27 cubos de dimensões 1x1x1 possuem um total de 27x6=162 faces, já que cada cubo possui 6 faces; cada face do cubo $3 \times 3 \times 3$ é formada a partir de 9 faces 1×1, essas faces no entanto não receberam cola, e multiplicando 9 por 6 (quantidade de faces de um cubo) encontramos 54, que é o número total de faces que não receberam cola; de 162 faces, 54 não receberam cola, o que nos dá um total de 108 faces coladas. Sabemos que uma gota de cola é usada para colar duas faces, sendo assim o número de gotas de cola utilizada é $108/2 = 54$ gotas.

b) Usando o mesmo raciocínio anterior. Os 1000 cubos de dimensões $1 \times 1 \times 1$ possuem um total de 1000x6=6000 faces, já que cada cubo possui 6 faces; cada face do cubo 10x10x10 é formada a partir de 100 faces 1×1, essas faces no entanto não receberam cola, e multiplicando 100 por 6 (quantidade de faces de um cubo) encontramos 600, que é o número total de faces que não receberam cola; de 6000 faces, 600 não receberam cola, o que nos dá um total de 5400 faces coladas. Sabemos que uma gota de cola é usada para colar duas faces, sendo assim o número de gotas de cola utilizada é $5400/2 = 2700$ gotas.

1 *Números Naturais escritos no tabuleiro*

Considere o seguinte tabuleiro quadriculado onde todos os números naturais foram escritos em diagonal.

$\ddots$					
10	$\ddots$				
6	9	$\ddots$			
3	5	8	12	$\ddots$	
1	2	4	7	11	$\ddots$

Cada quadradinho possui uma posição denotada por (x, y), em que x representa a coluna, contada da esquerda para a direita, e y representa a linha, contada debaixo para cima. Por exemplo, 12 é o número escrito no quadradinho de posição $(4,2)$:

a) Determine o número que está no quadradinho de posição $(4,4)$.

b) Determine o número que está no quadradinho de posição $(1,2016)$.

c) Determine o número que está no quadradinho de posição $(2013,2017)$.

1 Solução Alternativa de Dayvid Geverson Lopes Marques

a) Basta completar o quadrado, observando os padrões, e obtém-se o número 25.

b) Consideremos a sequência

$$\begin{array}{rcl} (1,1) & = & 1 \\ (1,2) & = & (1,1)+2 \\ (1,3) & = & (1,2)+3 \\ (1,4) & = & (1,3)+4 \\ & \vdots & \\ (1,n) & = & (1,n-1)+n \end{array}$$

Somando essas igualdades e fazendo os devidos cancelamentos obtemos:

$$\begin{array}{rcl} (1,n) & = & 1+2+\ldots+n \\ & = & \dfrac{n(n+1)}{2}. \end{array}$$

Observe que a sequência $(1,n)$ fornece o número que está no quadradinho de posição $(1,n)$, ou seja, 1° coluna e enésima linha. Portanto, o número que está localizado no quadradinho de posição $(1,2016)$ é

$$(1,2016) = \frac{2016 \cdot 2017}{2}$$

c) Consideremos a sequência

$$\begin{aligned}
(2,1) &= 2\\
(2,2) &= (2,1)+3\\
(2,3) &= (2,2)+4\\
(2,4) &= (2,3)+5\\
&\vdots\\
(2,n) = (2,n-1)&+n+1
\end{aligned}$$

Somando essas igualdades e fazendo os devidos cancelamentos obtemos:

$$\begin{aligned}
(2,n) &= 2+3+4+5+\ldots+n+n+1\\
&= \frac{n(n+1)}{2}+n
\end{aligned}$$

Com um raciocínio análogo, obtém-se:

$$\begin{aligned}
(3,n) &= \frac{n(n+1)}{2}+n+n+1\\
(4,n) &= \frac{n(n+1)}{2}+n+n+1+n+2\\
(5,n) &= \frac{n(n+1)}{2}+n+n+1+n+2+n+3
\end{aligned}$$

Analisemos a sequência

$$\begin{aligned}
(1,n) &= \frac{n(n+1)}{2}\\
(2,n) &= (1,n)+n\\
(3,n) &= (2,n)+n+1\\
(4,n) &= (3,n)+n+2\\
(5,n) &= (4,n)+n+3\\
&\vdots\\
(m,n) &= (m-1,n)+n+m-2
\end{aligned}$$

Somando essas igualdades e fazendo os devidos cancelamentos temos:

$$\begin{aligned}
(m,n) &= \frac{n(n+1)}{2}+n+n+1+n+2+n+3+\ldots+n+m+2\\
&= \frac{n(n+1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}+(m-1)(n-1)
\end{aligned}$$

Note que (m,n) é uma expressão geral que permite identificar o número dentro do quadradinho localizado na m−ésima coluna e n−ésima linha. Portanto, o número que está no quadradinho de posição $(2013,2017)$ é

$$(2013,2017)=\frac{2013\cdot 2012}{2}+\frac{2017\cdot 2018}{2}+2012\cdot 2016.$$