

# Sobre o cartaz da OBMEP 2018

**14ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS**  
**OBMEP 2018**

**inscrições até**  
**02 de abril de 2018**

**somente na página**  
**[www.obmep.org.br](http://www.obmep.org.br)**

**Escolas Públicas + Privadas**  
**informações: (21) 2529-5084**

**provas 1ª fase**  
**05 de junho de 2018**

**provas 2ª fase**  
**15 de setembro de 2018**

**OBMEP 2018**  
Somando novos talentos para o Brasil

**APOIO**  
BRASIL  
CAPES  
CNPq  
SBM

**REALIZAÇÃO**  
Impa  
MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÃO E COMUNICAÇÕES  
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
FUNDAÇÃO DE AMPLIAR O ENSINO SUPERIOR



Somando novos talentos para o Brasil

Michel Spira  
Departamento de Matemática – UFMG  
michelspira@gmail.com

# A espiral logarítmica

O tema do cartaz da OBMEP 2018 é a *espiral logarítmica*, também em conhecida como *espiral equiangular*. Essa curva tem lindas propriedades e foi estudada por, entre outros, René Descartes (1596-1650) e Jacques Bernoulli (1655-1705). Nesse texto, apresentamos a espiral logarítmica a partir de conceitos elementares de progressões geométricas, semelhança de triângulos e a função exponencial.

## Introdução

Espirais manifestam-se na natureza de modo extraordinariamente diverso, como podemos ver abaixo.



Várias dessas espirais partilham uma ideia matemática comum, que é o tema desse texto; elas são exemplos de espirais logarítmicas. Aproveitamos para dizer que nem todas as espirais na natureza partilham dessa ideia; ou seja, nem toda espiral que cruzar nosso caminho é logarítmica!

## A matemática da concha do nautilus

Vamos motivar nosso trabalho com a imagem de uma radiografia da concha do *nautilus*, um molusco simpático que faz a alegria dos matemáticos.

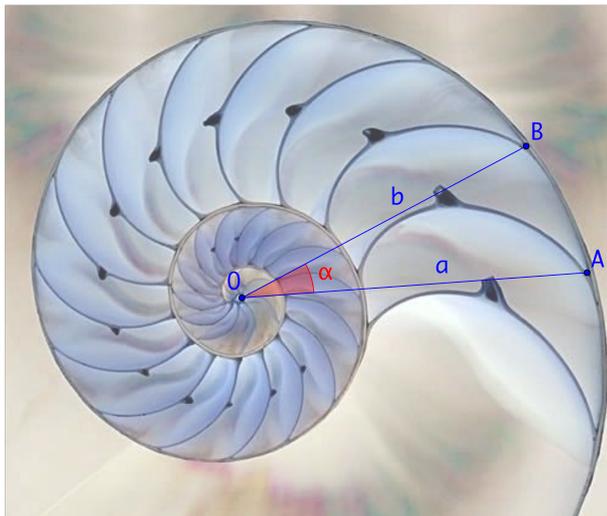


Figura 1: Radiografia da concha do nautilus

A observação dessa imagem nos transmite, de modo intuitivo, os conceitos de centro, rotação e mudança regular de escala. Nosso trabalho será colocar linguagem matemática nessa intuição.

Marcamos na figura o *centro*  $O$  e dois pontos análogos  $A$  e  $B$ , os *raios*  $OA$  e  $OB$ , o ângulo  $\alpha$  entre esses raios (no caso,  $\theta$  é aproximadamente  $\frac{2\pi}{15}$ ); colocamos também  $OA = a$  e  $OB = b$ . Finalmente, definimos a *razão*  $q = \frac{b}{a}$  e observamos que  $q < 1$  pois  $b < a$  (no caso,  $q$  é aproximadamente 0,93). Segue que

$$OB = b = \left(\frac{b}{a}\right) a = qa$$

e podemos descrever  $B$  como obtido de  $A$  pelo seguinte processo:

- rotacionar  $A$  por  $\alpha$  em torno de  $O$ ;
- deslocar o ponto resultante pelo fator  $q$  ao longo do raio  $AO$ .

Temos agora em mãos um processo geral, que pode ser aplicado a qualquer ponto do plano a partir de  $O, \alpha, q$  quaisquer com  $0 < q < 1$  e que ilustramos na figura abaixo.

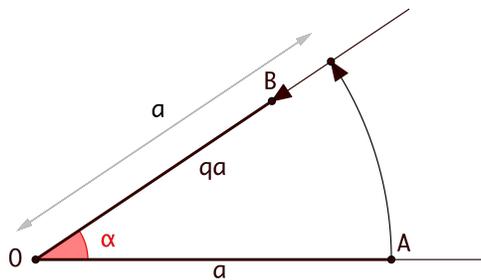


Figura 2:  $A + \text{dados iniciais } \{O, \alpha, q\} = B$

Para facilitar a notação, vamos colocar  $A = A_0$  e  $B = A_1$ , e chamar o processo rotação – contração de  $\mathcal{P}$ , de modo que  $\mathcal{P}(A_0) = A_1$ . É irresistível iterar esse processo, definindo a sequência de pontos  $\mathcal{P}(A_1) = A_2$ ,  $\mathcal{P}(A_2) = A_3, \dots$ , e assim por diante. A figura abaixo ilustra esse processo de iterações.

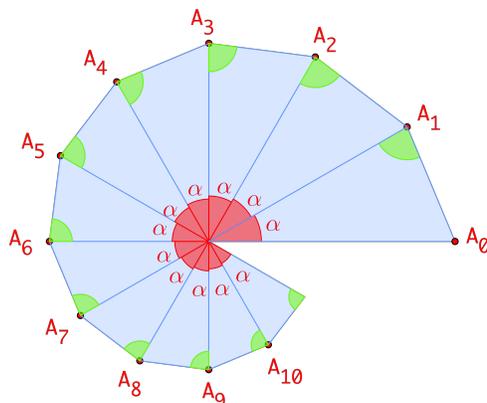


Figura 3: Iterações de  $A_0$

Notamos que  $OA_1 = aq$ ,  $OA_2 = q(aq) = aq^2$  e, em geral,  $OA_n = aq^n$ ; ou seja, a sequência das distâncias sucessivas desses pontos ao centro  $O$  formam uma progressão geométrica de termo inicial  $a$  e razão  $q$ . Observamos também que o ângulo entre raios consecutivos é sempre igual a  $\alpha$ . O(a) leitor(a) não terá dificuldade em mostrar que os triângulos azuis são todos semelhantes; em consequência, os ângulos marcados em verde são todos iguais.

Deve estar claro que acabamos de entender a estrutura matemática da concha do nautilus, que é mostrada na figura a seguir.

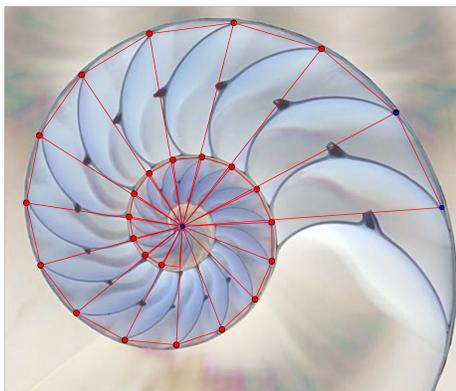


Figura 4: A matemática do nautilus

O autor garante que a figura 4 foi feita sem truques. Após marcar manualmente o centro e os dois pontos azuis, assim determinando  $O$ ,  $A$  e  $q$ , os pontos vermelhos foram construídos usando o comando *Sequence* do Geogebra<sup>1</sup>. O nautilus “sabe” o que faz!

<sup>1</sup>O Geogebra é um programa de geometria dinâmica gratuito, com o qual foram feitas todas as figuras de caráter geométrico desse texto. Ele está disponível para download em <https://www.geogebra.org/download>

## Do discreto para o contínuo

Continuamos analisando  $\mathcal{P}$  em geral, ou seja, com  $O$ ,  $A$  e  $q$  arbitrários e  $0 < q < 1$ . O comprimento de  $OA_n$  é  $aq^n$ ; por motivos que ficarão claros em breve, vamos denotar esse comprimento por  $r_n$ . Para chegar a  $OA_n$ , o raio  $OA_0$  rodou  $\theta_n = n\alpha$  em torno da origem. Logo  $n = \frac{\theta_n}{\alpha}$  e temos

$$r_n = aq^n = aq^{\frac{\theta_n}{\alpha}} = a\left(q^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\theta_n}.$$

Escrevendo  $p = q^{\frac{1}{\alpha}}$  temos  $r_n = ap^{\theta_n}$ , o que sugere definir a função exponencial  $r(\theta) = ap^\theta$ . Essa função descreve corretamente a situação para  $\theta = \theta_n$ ; de fato

$$r(\theta_n) = ap^{\theta_n} = ap^{n\alpha} = a\left(q^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{n\alpha} = aq^n = r_n.$$

Observamos que de  $p < 1$  segue que  $r(\theta)$  é uma função decrescente. Geometricamente, o papel de  $r(\theta)$  é análogo ao que vimos na figura 2: rotacionamos  $OA_0$  de um ângulo  $\theta$  em torno da origem e marcamos, no resultado dessa rotação, um ponto cuja distância a  $O$  é  $r(\theta)$ .

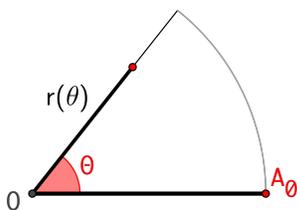


Figura 5: O papel de  $r(\theta)$

Essa função faz a transição entre “espirais por pontos” e “espirais de verdade”, como mostramos abaixo.

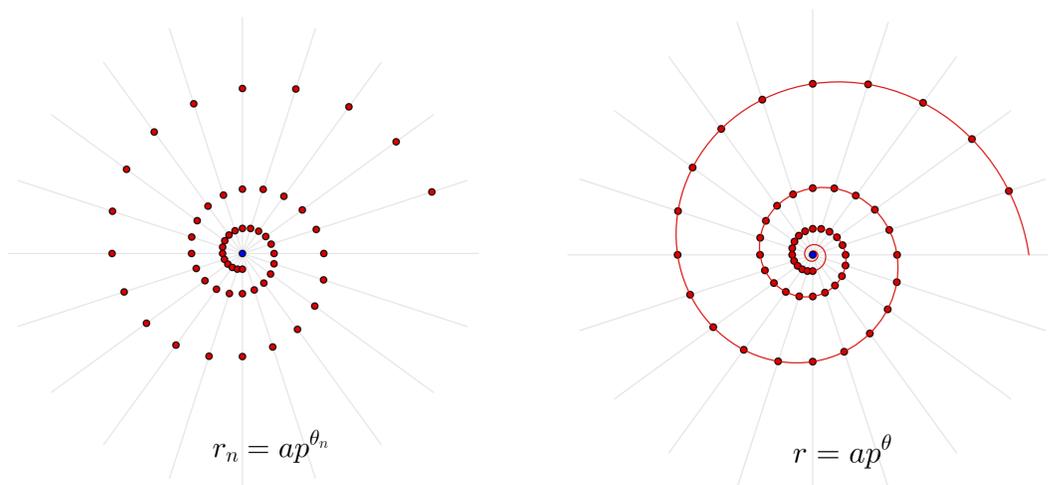


Figura 6: Espiral por pontos  $\rightarrow$  Espiral de verdade

Podemos também visualizar essa transição como o resultado de fazer  $\alpha$  cada vez menor em espirais por pontos, como na figura a seguir.

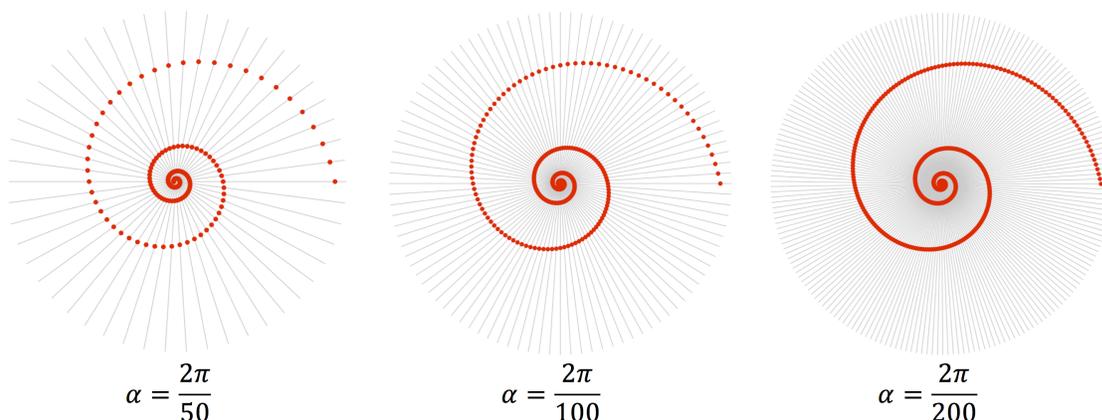


Figura 7: Do discreto para o “contínuo”

E quanto a nosso amigo nautilus. . .

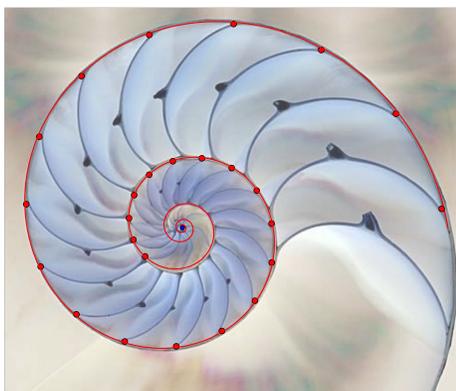


Figura 8: nada de novo!

## A espiral logarítmica (finalmente!)

A curva  $r(\theta) = ap^\theta$ , desenhada como na figura 6, é a que chamamos de espiral logarítmica; notamos aqui que  $\theta$  pode assumir qualquer valor real, de modo que a espiral logarítmica “nunca acaba”, tanto para dentro (em direção ao centro) quanto para fora.

Notamos também que, na expressão  $r(\theta) = ap^\theta$ , o  $a$  serve apenas como fator de escala. O comportamento da curva é controlado pelo fator de contração  $p$  e, desse modo, a expressão “a espiral logarítmica” é enganosa. Há uma família infinita de espirais logarítmicas, uma para cada valor de  $p$  (a menos de escala). Assim, comentários gerais sobre “a espiral” se referem a toda essa família. A seguir mostramos algumas espirais logarítmicas, com o valor correspondente de  $p$ .

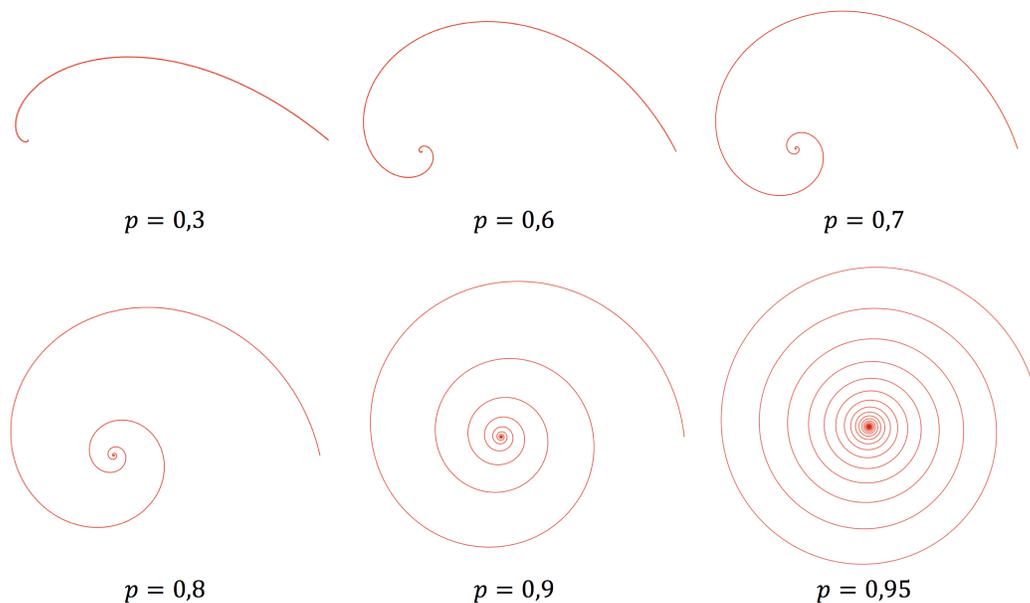


Figura 9: Espirais logarítmicas

Observamos que a espiral logarítmica dá um número infinito de voltas em torno do centro (pois  $r(\theta)$  está definido para qualquer  $\theta$ ) sem nunca atingir esse centro (pois  $r(\theta)$  nunca é 0). Observamos também que quanto menor  $p$ , mais rápido a espiral se aproxima da origem; essa última observação decorre do fato de a função exponencial  $f(x) = s^x$  ser decrescente para  $0 < s < 1$ .

### Progressões geométricas na espiral logarítmica

Vamos agora exibir três progressões geométricas que estão “escondidas” na espiral logarítmica. Essas progressões já pareceram, implicitamente, na apresentação da espiral por pontos; assim, elas também podem ser vistas através da passagem do discreto para o contínuo, conforme a figura 7.

Consideremos primeiro pontos  $P_1, P_2, P_3, \dots$  sobre a espiral de modo que os raios correspondentes estejam separados por ângulos iguais, como na figura.

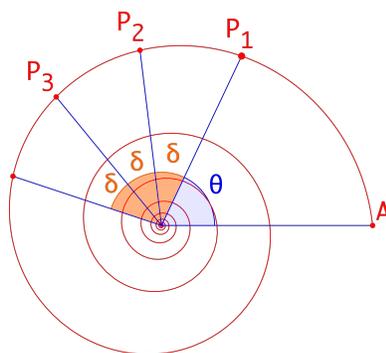


Figura 10: Progressão geométrica em raios sucessivos

Temos  $OP_1 = ap^\theta$ ,  $OP_2 = ap^{\theta+\delta} = p^\delta \cdot ap^\theta$  e  $OP_3 = ap^{\theta+2\delta} = p^{2\delta} ap^\theta$ . Logo

$$\frac{OP_2}{OP_1} = \frac{p^\delta \cdot ap^\theta}{ap^\theta} = p^\delta = \frac{p^\delta ap^\theta}{p^{2\delta} ap^\theta} = \frac{OP_3}{OP_2}$$

e o mesmo vale para qualquer quociente do tipo  $\frac{OP_n}{OP_{n+1}}$ , ou seja, os comprimentos de  $OP_1, OP_2, OP_3, \dots$  formam uma progressão geométrica de razão  $p^\delta$ .

Pensemos agora em um raio cortando a espiral logarítmica em pontos  $P_1, P_2, P_3, \dots$  como na figura abaixo.

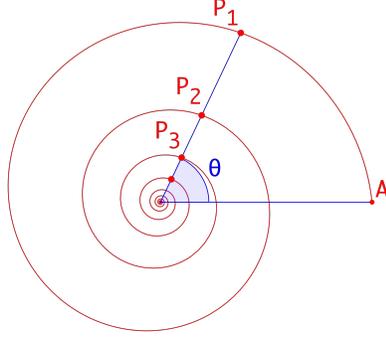


Figura 11: Progressões geométricas em um raio

Aqui temos  $OP_1 = ap^\theta$  e

$$OP_2 = ap^{\theta+2\pi} = p^{2\pi} ap^\theta = OP_1$$

ou seja

$$\frac{OP_2}{OP_1} = p^{2\pi} = \text{constante}$$

e segue que  $OP_1, OP_2, OP_3, \dots$  é uma progressão geométrica de razão  $p^{2\pi}$ .

Além disso, temos

$$\frac{P_1P_2}{P_2P_3} = \frac{ap^\delta - p^\delta ap^\theta}{p^\delta ap^\theta - p^{2\delta} ap^\theta} = \frac{1 - p^\delta}{p^\delta (1 - p^\delta)} = \frac{1}{p^\delta}$$

e segue que a sequência  $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, \dots$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{p^\delta}$ .

## Três lindas propriedades da espiral logarítmica

A figura 3 e a transição do discreto para o contínuo, como na figura 7, permitem enxergar algumas propriedades interessantes da espiral logarítmica. Por exemplo, os ângulos iguais marcados em verde na figura 3 correspondem ao fato de que qualquer tangente à espiral logarítmica faz um ângulo constante com o raio que passa pelo ponto de tangência.

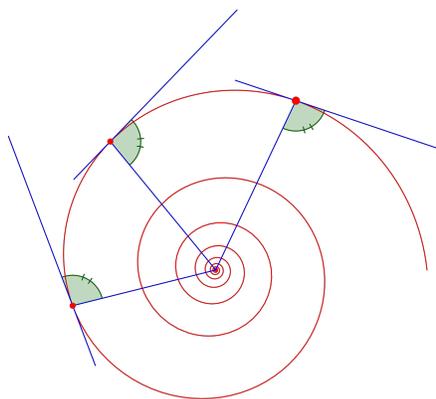


Figura 12: A propriedade equiangular

É por esse motivo que a espiral logarítmica também é conhecida como *espiral equiangular*.

Por sinal, o “logarítmica” vem do fato de a espiral logarítmica ter sido primeiro estudada na forma  $\ln r = \theta$ ; aqui  $\ln$  denota o logaritmo de base  $e$ . Essa expressão é o mesmo que  $r = e^\theta$  e não há diferença essencial para  $r = ap^\theta$ , exceto por questões de escala.

Outra propriedade inesperada da espiral logarítmica é que seu comprimento a partir de qualquer de seus pontos, em direção ao centro, é finito – ou seja, damos infinitas voltas em torno do centro e nunca chegamos a ele, mas também nunca vamos andar mais que uma distância fixa! Para ver isso, colocamos  $A_0A_1 = b$  na figura 3; segue que  $A_1A_2 = bq$ ,  $A_2A_3 = bq^2$  e assim por diante. Logo

$$\begin{aligned} A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n &= b + bq + bq^2 + \dots + bq^n \\ &= b(1 + q + q^2 + \dots + q^n) \\ &= b \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} < \frac{b}{1 - q} \end{aligned}$$

ou seja, qualquer poligonal  $A_0A_1A_2 \dots A_n$  tem comprimento menor que  $\frac{b}{1-q}$ . Uma breve olhada para a figura 7 deve deixar intuitivamente claro que essa propriedade “passa” para a espiral logarítmica, substituindo “comprimento da poligonal” por “comprimento da curva”.

Finalmente, apontamos que a espiral logarítmica é uma curva *autosimilar*. Definir precisamente esse conceito nos levaria além do objetivo desse texto, mas a ideia pode ser vista claramente na figura abaixo.

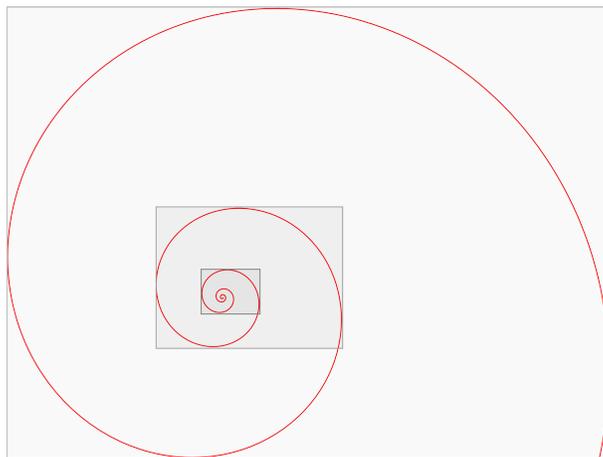


Figura 13: Autosimilaridade da espiral logarítmica

A autosimilaridade se manifesta aqui pela observação de que as porções da espiral logarítmica contidas em cada um dos retângulos indicados são exatamente iguais, a menos de mudança de escala.

## Progressões geométricas de razão $q < 1$

Usamos algumas vezes a expressão “aproximar-se da origem”, que merece alguns comentários.

Consideremos a sequência  $0, 11; 0, 101; 0, 1001$ , etc. Ela é decrescente e seus termos ficam cada vez mais próximos de 0, mas essa aproximação nunca é menor que 0,1, que funciona como uma barreira para a sequência em sua tentativa (frustrada) de alcançar o 0. A progressão geométrica  $1, q, q^2, q^3, \dots$  com  $0 < q < 1$  também é decrescente, mas se aproxima de 0 de uma maneira bem mais forte; não há barreiras para ela<sup>2</sup>, ou seja, seus termos chegam tão perto de 0 quanto quisermos. Mais precisamente, qualquer que seja  $0 < c < 1$ , existe um natural  $n$  tal que  $q^n < c$  e, conseqüentemente, todos os termos subsequentes também são menores que  $c$ .

Para mostrar isso, observamos que

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} < \frac{1}{1 - q},$$

expressão válida para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ . Suponhamos, por absurdo, que  $0 < c < 1$  seja uma barreira para nossa progressão geométrica, ou seja,  $q^n \geq c$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Escolhemos  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $mc > \frac{1}{1-q}$  e temos

$$\frac{1}{1 - q} > 1 + q + q^2 + \dots + q^{m-1} \geq mc > \frac{1}{1 - q},$$

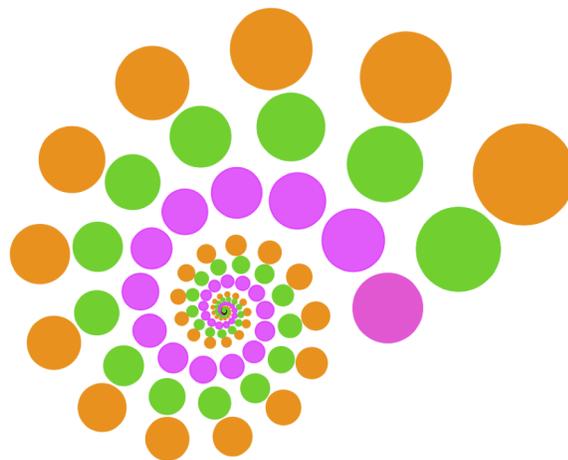
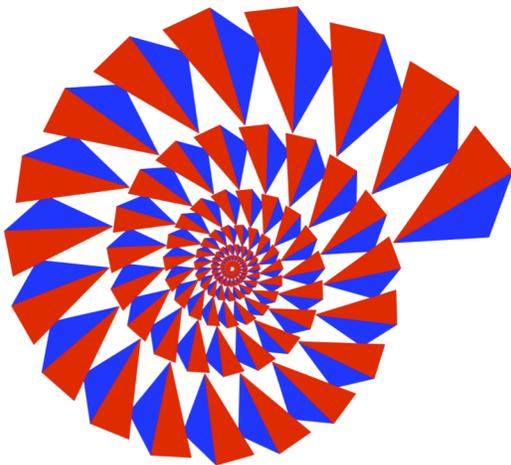
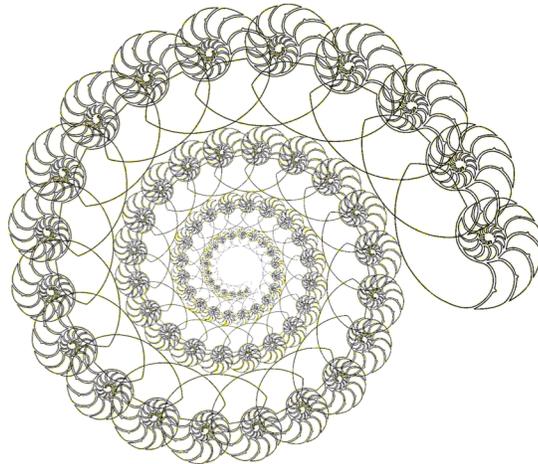
um absurdo que demonstra nossa afirmativa.

Esse fato justifica nossa observação visual de que a espiral logarítmica, ao se enrolar em torno do centro, torna-se eventualmente mais próxima dele do que qualquer distância pré-fixada.

<sup>2</sup>Em linguagem mais técnica, dizemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ .

## Brincadeiras

Nada nos impede de, uma vez o terminado o trabalho, brincar um pouco. As figuras que seguem são resultado de algumas brincadeiras, mas tem também o objetivo mais sério de reforçar visualmente os conceitos abordados ao longo do texto.



## Referências

O número de *sites* na internet que falam da espiral logarítmica é, aparentemente, infinito. Deixamos ao(à) leitor(a) o divertimento de Googlar sobre o assunto, com o aviso de que o material encontrado vai do científico ao místico. Não podemos, no entanto, deixar de recomendar as páginas

- <http://www.mathcurve.com/courbes2d/logarithmic/logarithmic.shtml>
- [http://xahlee.info/SpecialPlaneCurves\\_dir/EquiangularSpiral\\_dir/equiangularSpiral.html](http://xahlee.info/SpecialPlaneCurves_dir/EquiangularSpiral_dir/equiangularSpiral.html)

Quanto a referências bibliográficas, idem; limitamo-nos a apontar as notas do minicurso *A espiral equiangular* do Professor Sérgio Alves, ministrado na I Bienal da SBM e onde o(a) leitor(a) vai encontrar bem mais sobre essa maravilhosa curva.