

(1) Em uma caixa foram colocados um cartão no qual está escrito o número 1, dois cartões nos quais está escrito o número 2, três cartões com o número 3 e assim por diante, até dez cartões com o número 10.

(a) Quantos cartões foram colocados na caixa?

Correção Regional	Correção Nacional
----------------------	----------------------

(b) Explique como escolher 19 cartões da caixa sem que três deles tenham o mesmo número.

Correção Regional	Correção Nacional
----------------------	----------------------

(c) Qual é o menor número de cartões que pode ser retirado da caixa, ao acaso, para que se tenha certeza que cinco deles têm o mesmo número? Justifique sua resposta.

Correção Regional	Correção Nacional
----------------------	----------------------

TOTAL

Correção Regional	Correção Nacional
----------------------	----------------------

(2) Um número inteiro n é *simpático* quando existem inteiros positivos a , b e c tais que $a < b < c$ e $n = a^2 + b^2 - c^2$. Por exemplo, os números 1 e 2 são simpáticos, pois $1 = 4^2 + 7^2 - 8^2$ e $2 = 5^2 + 11^2 - 12^2$.

(a) Verifique que $(3x + 1)^2 + (4x + 2)^2 - (5x + 2)^2$ é igual a $2x + 1$, qualquer que seja x .

Correção
Regional

Correção
Nacional

(b) Encontre números inteiros m e n tais que $(3x - m)^2 + (4x - n)^2 - (5x - 5)^2 = 2x$, qualquer que seja x .

Correção
Regional

Correção
Nacional

(c) Mostre que o número 4 é simpático.

Correção
Regional

Correção
Nacional

(d) Mostre que todos os números inteiros positivos são simpáticos.

Correção
Regional

Correção
Nacional

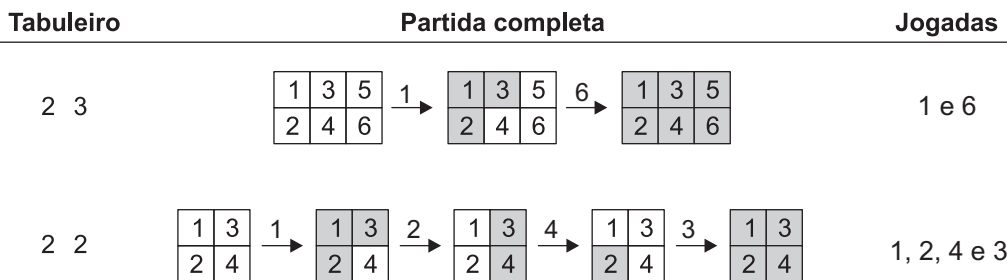
TOTAL

Correção
Regional

Correção
Nacional

(3) No jogo do *Troca-Cor* usa-se um tabuleiro com duas linhas e com quantas colunas quisermos, cujas casas podem mudar da cor branca para cinza e vice-versa. As casas da 1ª linha são numeradas com os números ímpares e as da 2ª linha com os números pares. Em cada jogada aperta-se uma casa e, então, essa casa e as casas vizinhas mudam de cor. Uma *partida completa* começa com todas as casas brancas e termina quando todas ficam cinzas. Veja dois exemplos de partidas completas (os números acima das flechas indicam a casa apertada em cada jogada):

Casas vizinhas são casas que têm um lado comum.



(a) Escreva as jogadas de uma partida completa nos tabuleiros ao lado.

1	3	5	7	9
2	4	6	8	10

1	3	5	7
2	4	6	8

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

(b) Explique como jogar uma partida completa no tabuleiro 2 100.

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

(c) Explique como jogar uma partida completa com exatamente 51 jogadas no tabuleiro 2 101.

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

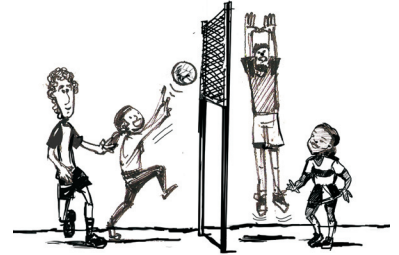
(d) Explique porque não é possível jogar uma partida completa com menos que 51 jogadas no tabuleiro 2 101.

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

TOTAL	Correção Regional	Correção Nacional
--------------	-------------------	-------------------

(4) Quatro times, entre os quais o Quixajuba, disputam um torneio de vôlei em que:

- cada time joga contra cada um dos outros uma única vez;
- qualquer partida termina com a vitória de um dos times;
- em qualquer partida os times têm a mesma probabilidade de ganhar;
- ao final do torneio, os times são classificados em ordem pelo número de vitórias.



(a) É possível que, ao final do torneio, todos os times tenham o mesmo número de vitórias? Por quê?

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

(b) Qual é a probabilidade de que o torneio termine com o Quixajuba isolado em primeiro lugar?

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

(c) Qual é a probabilidade de que o torneio termine com três times empatados em primeiro lugar?

	Correção Regional	Correção Nacional
TOTAL	Correção Regional	Correção Nacional

(5) Dois triângulos retângulos isósceles com catetos de medida 2 são posicionados como mostra a figura 1. A seguir, o triângulo da esquerda é deslocado para a direita. Nas figuras 2 e 3, x indica a distância entre os vértices A e B dos dois triângulos.

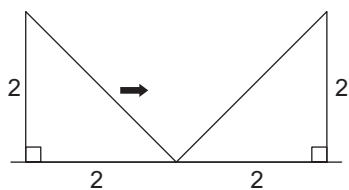


Figura 1

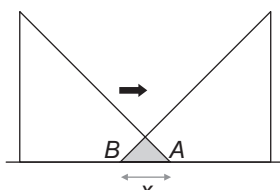


Figura 2

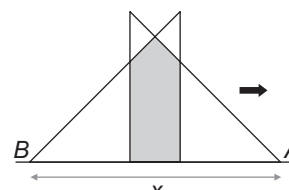


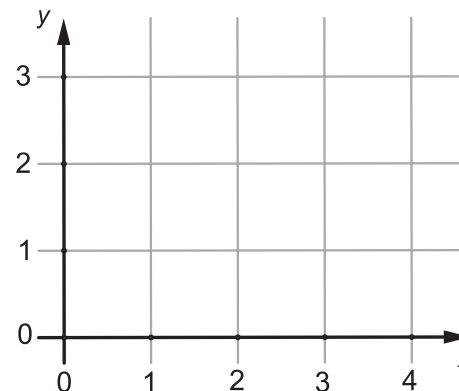
Figura 3

Para cada x no intervalo $[0,4]$, seja $f(x)$ a área da região comum aos dois triângulos (em cinza nas figuras).

(a) Calcule $f(1)$ e $f(3)$.

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

(b) Encontre as expressões de f nos intervalos $[0,2]$ e $[2,4]$ e esboce o seu gráfico.



Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

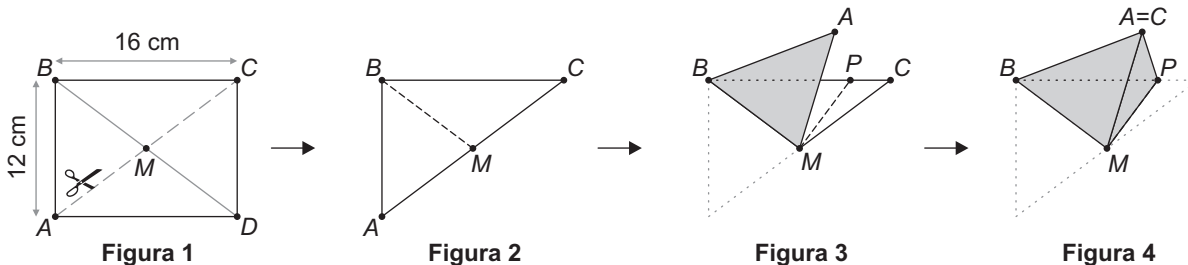
(c) Qual é a área máxima da região comum aos dois triângulos?

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

TOTAL

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

(6) Uma folha de papel retangular $ABCD$ de 12 cm por 16 cm (figura 1) é cortada ao longo da diagonal AC (figura 2). O triângulo ABC é dobrado pelo segmento BM (figura 3), sendo M o ponto de encontro das diagonais do retângulo $ABCD$. Finalmente, é feita uma dobra ao longo de MP , onde P é escolhido de modo que CM coincida com AM (figura 4).



(a) Explique porque o ângulo \widehat{BMP} na figura 4 é reto.

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

(b) Mostre que o triângulo BMP da figura 4 é semelhante ao triângulo ABC da figura 2.

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

(c) Calcule a área do triângulo BMP da figura 4.

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

(d) Calcule a área do quadrilátero $ABMP$ da figura 4.

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

TOTAL

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

RASCUNHO