

1. Em cada casa de um quadriculado 4×4 deve ser colocado um dos números 1, 3, 7 e 8, de modo que em cada linha, coluna ou diagonal apareçam os quatro números.

a) Qual é a soma dos números nos quatro quadradinhos centrais quando o quadriculado é preenchido de acordo com o enunciado?

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

b) Suponha que 1, 3, 7 e 8 sejam colocados na diagonal, como na figura. De quantas maneiras é possível completar o quadriculado de acordo com o enunciado?

1			
	3		
		7	
			8

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

c) Qual é o maior valor possível para a soma dos números que aparecem nas casas cinzentas quando o quadriculado é preenchido de acordo com o enunciado?

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

TOTAL

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

2. Começando com qualquer número natural não nulo é sempre possível formar uma sequência de números que termina em 1, seguindo repetidamente as instruções abaixo:

- se o número for ímpar, soma-se 1;
- se o número for par, divide-se por 2.

Por exemplo, começando com o número 21, forma-se a seguinte sequência:

$$21 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

Nessa sequência aparecem nove números; por isso, dizemos que ela tem *comprimento* 9. Além disso, como ela começa com um número ímpar, dizemos que ela é uma *sequência ímpar*.

a) Escreva a sequência que começa com 37.

Correção Regional	Correção Nacional
----------------------	----------------------

b) Existem três sequências de comprimento 5, sendo duas pares e uma ímpar. Escreva essas sequências.

Correção Regional	Correção Nacional
----------------------	----------------------

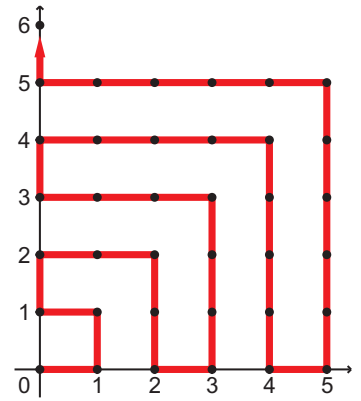
c) Quantas são as sequências pares e quantas são as sequências ímpares de comprimento 6? E de comprimento 7?

Correção Regional	Correção Nacional
----------------------	----------------------

d) Existem ao todo 377 sequências de comprimento 15, sendo 233 pares e 144 ímpares. Quantas são as sequências de comprimento 16? Dessas, quantas são pares? Não se esqueça de justificar sua resposta.

	Correção Regional	Correção Nacional
TOTAL	Correção Regional	Correção Nacional

3. A linha poligonal da figura parte da origem e passa por todos os pontos do plano que têm coordenadas inteiras não negativas, de acordo com o padrão indicado. A unidade de comprimento nos eixos é 1 cm. O comprimento da poligonal da origem até um ponto (a,b) é chamado de *lonjura* de (a,b) ; por exemplo, a lonjura de $(1,2)$ é 5 cm.



a) Determine a lonjura dos pontos $(3,2)$ e $(0,4)$.

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

b) Quantos pontos de coordenadas inteiras estão contidos no interior e nos lados do quadrado cujos vértices são $(0,0)$, $(n,0)$, (n,n) e $(0,n)$?

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

c) Explique por que a lonjura do ponto (n,n) é $n^2 + n$.

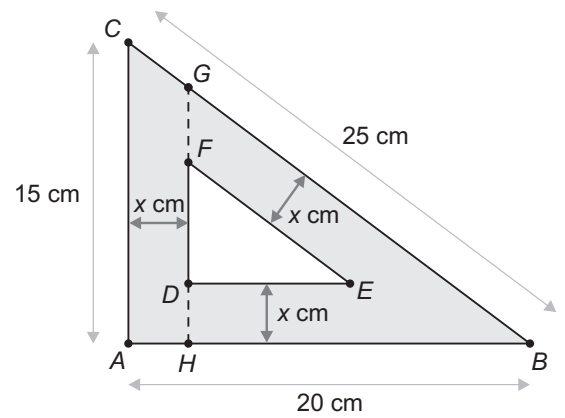
Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

d) Qual é o ponto cuja lonjura é 425?

TOTAL	Correção Regional	Correção Nacional
	Correção Regional	Correção Nacional

4. Na figura, os lados do triângulo DEF são paralelos aos lados do triângulo retângulo ABC . Os pontos H, D, F e G estão alinhados e $0 \leq x \leq 5$.

a) Calcule o comprimento de GH em função de x .

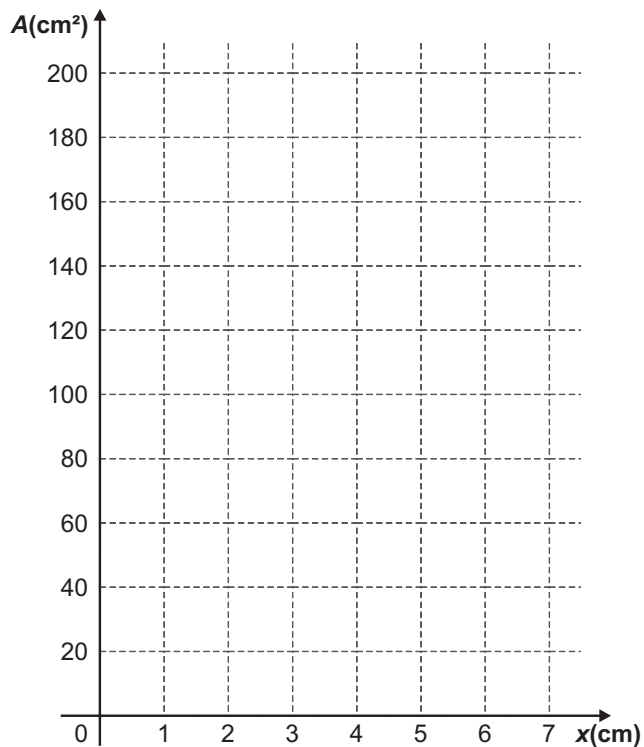


Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

b) Mostre que $CG = FG = \frac{5x}{4}$ cm.

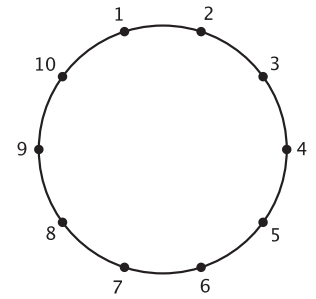
Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

c) Faça o gráfico da área A do triângulo DEF em função de x .



	Correção Regional	Correção Nacional
TOTAL	Correção Regional	Correção Nacional

5. Em uma caixa há 10 bolas idênticas, numeradas de 1 a 10. O número de cada bola corresponde a um dos pontos da figura, os quais dividem a circunferência em 10 partes iguais. Nos itens a seguir, considere que as bolas são retiradas ao acaso, uma a uma e sem reposição.



a) Se forem retiradas duas bolas, qual é a probabilidade de que o segmento determinado pelos pontos correspondentes seja um diâmetro da circunferência?

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

b) Se forem retiradas três bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um triângulo retângulo?

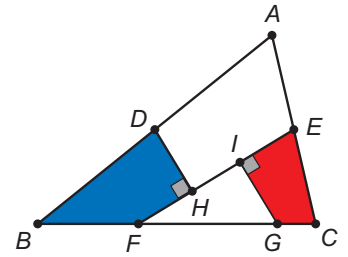
Um ângulo inscrito em uma circunferência é reto se e somente se o arco correspondente é uma semicircunferência.

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

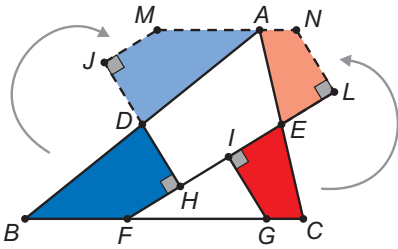
c) Se forem retiradas quatro bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um retângulo?

	Correção Regional	Correção Nacional
TOTAL	Correção Regional	Correção Nacional

6. Em todas as figuras desta questão, vemos um triângulo ABC dividido em quatro partes; nesses triângulos, D é ponto médio de AB , E é ponto médio de AC e FG mede $\frac{1}{2}BC$.

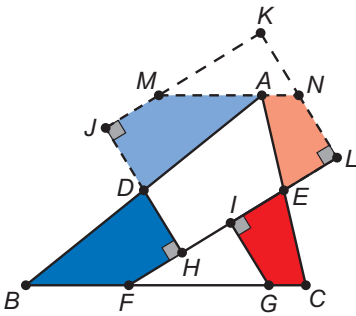


a) Os quadriláteros $DJMA$ e $ELNA$ são obtidos girando de 180° os quadriláteros $DHFB$ e $EIGC$ em torno de D e E , respectivamente. Explique por que os pontos M , A e N estão alinhados, ou seja, por que a medida do ângulo $M\hat{A}N$ é igual a 180° .



Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

b) Na figura, o ponto K é a interseção das retas JM e LN . Explique por que os triângulos FGI e MNK são congruentes.



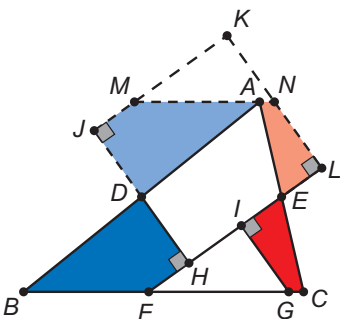
Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

Os itens acima mostram que $HJKL$ é um retângulo formado com as quatro partes em que o triângulo ABC foi dividido.

c) Mostre que $LH = EF$.

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

d) Na figura o triângulo ABC tem área 9 e $HJKL$ é um quadrado. Calcule o comprimento de EF .




Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

TOTAL

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

RASCUNHO

Operacionalização:

 Fundação Carlos Chagas