Questão 1 – Solução

a) Primeiro multiplicamos os algarismos de 79, obtendo $7 \times 9 = 63$, e depois somamos os algarismos desse produto, obtendo $6 + 3 = 9$. Logo o transformado de é 79 é 9.

b) A brincadeira de Cláudia tem duas etapas: a primeira, na qual ela multiplica os algarismos, e a segunda, na qual ela soma os algarismos do produto encontrado, no caso de esse produto ter mais de um algarismo. Para que 3 seja obtido como o transformado de um número na primeira etapa, esse número só pode ser 13 ou 31. Para que 3 seja obtido como o transformado de um número na segunda etapa, o resultado da primeira etapa deve ser um número de dois algarismos cuja soma seja 3, ou seja, deve ser 12, 21 ou 30. A tabela abaixo mostra todos os números de dois algarismos cujo produto é um desses três números.

12	26, 62, 34, 43
21	37, 73
30	56, 65

Assim, os números 13, 31,26, 62, 34, 43, 37, 73,56 e 65 são os únicos números de dois dígitos cujo transformado é 3.

c) *1ª solução:* Na segunda etapa da brincadeira temos uma soma de algarismos, que é sempre diferente de 0; portanto, 0 nunca será obtido como transformado de um número de três algarismos nessa etapa. Para se obter 0 como transformado de algum número de três algarismos na primeira etapa, esse número deve ter 0 como algarismo das unidades, das dezenas ou de ambas. Os números de três algarismos que tem 0 tanto nas unidades quanto nas dezenas são 100, 200,...,900, num total de 9. Os números que tem 0 apenas nas unidades são da forma XY0, onde X e Y representam algarismos de 1 a 9; há $9 \times 9 = 81$ números desse tipo, e o mesmo raciocínio mostra que há 81 números de três algarismos com 0 apenas no algarismo das dezenas. No total, há $9 + 81 + 81 = 171$ números de três algarismos cujo transformado é 0.

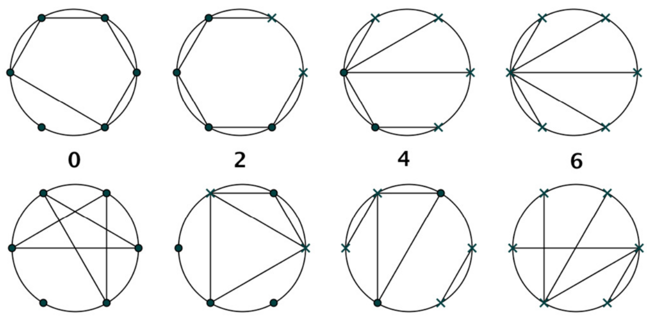
2ª solução: Como na solução acima, concluímos que o 0 deve aparecer na casa das unidades, das dezenas ou em ambas. O algarismo das centenas pode ser qualquer algarismo de 1 a 9. Depois de escolhido esse algarismo, pode-se escolher os algarismos das dezenas e das unidades de 19 maneiras diferentes; por exemplo, 100, 101, 102,..., 109, 110, 120, ..., 190 são as 19 possibilidades com o 1 na primeira posição. Logo o total procurado é $9 \times 19 = 171$.

3ª solução: Como na solução acima, concluímos que o 0 deve aparecer na casa das unidades, das dezenas ou ambas. Há 90 números com 0 nas unidades e 90 com 0 nas dezenas, bem como 9 que tem 0 tanto nas dezenas quanto nas unidades. No total, há $90 + 90 - 9 = 171$ números de três algarismos cujo transformado é 0.

<u>Questão 2 – Solução</u>

a) Juquinha, ao marcar cinco pontos sobre uma circunferência e traçar todas as ligações possíveis, sempre obtém cinco pontos-pares, pois cada ponto está ligado aos outros quatro pontos restantes. Retirando qualquer uma dessas ligações, dois desses cinco pontos-pares passam a ser pontos-ímpares. Logo, ao marcar cinco pontos sobre uma circunferência e fazer todas as ligações possíveis, exceto uma, Juquinha obtém 2 pontos-ímpares e 3 pontos-pares..

b) Na figura abaixo mostramos duas maneirasde obter 0, 2, 4 e 6 pontos-ímpares (assinalados com ×) com exatamente cinco conexões.



c) Antes de Juquinha começar a fazer ligações, todos os pontos são pares, pois 0 é par. Vamos agora pensar emJuquinha desenhando as ligações uma a uma. Quando ele desenha a primeira, os dois pontos ligados passam a ser ímpares. A partir daí, cada nova ligação pode

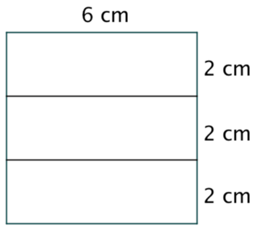
- ligar dois pontos pares: nesse caso, esses pontos tornam-se ímpares e o número de pontos ímpares aumenta de dois; ou
- ligar dois pontos ímpares: nesse caso, esses pontos tornam-se pares e o número de pontos ímpares diminui de dois; ou
- ligar um ponto par a um ponto ímpar: nesse caso, o ponto par torna-se ímpar, o ponto ímpar torna-separ e o número de pontos ímpares continua o mesmo.

Em resumo, a cada nova ligação o número de pontos ímpares aumenta ou diminui de dois ou então permanece o mesmo. Como o número inicial de pontos ímpares é 0, que é par, segue que o número de pontos ímpares é sempre par, independentemente do número de pontos iniciais e do número de ligações

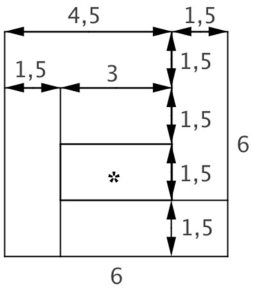
Uma solução perfeitamente análoga parte de um desenho pronto, retirando as ligações uma a uma.

2ª solução: suponhamos que Juquinha tenha acabado de desenhar a figura. Para cada vértice, contamos a quantos outros vértices ele está ligado e somamos todos esses números. Essa soma é par; de fato, como cada ligação conecta dois vértices, essa soma é duas vezes o números de ligações. Cada vértice par contribui com uma parcela par e cada vértice ímpar com uma parcela ímpar para essa soma; como a soma é par, o número de parcelas ímpares deve ser par, ou seja, o número de vértices ímpares é par.

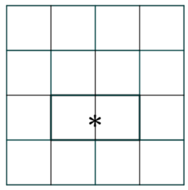
Questão 3 – Solução



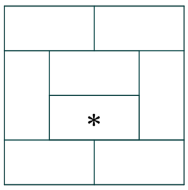
a) Como o quadrado formado com os três retângulos recortados da primeira tira tem área 36 cm², seu lado mede 6cm. Logo o comprimento dos retângulos é 6 cm e sua largura é um terço de seu comprimento, ou seja, 2 cm.



b) *1ª solução:* Como no item anterior, o lado do quadrado formado com os seis retângulos recortados da segunda tira mede 6 cm. Como todos os retângulos tem a mesma largura, a figura mostra que essa largura é um quarto da medida do lado, isto é, 1,5 cm. As medidas dos outros retângulos são então determinadas imediatamente, como indicado. Em particular, as dimensões do retângulo destacado são 3 cm e 1,5 cm; logo seu perímetro é $1{,}5+1{,}5+3+3+9=9$ cm e sua área é $1{,}5\times 3=4{,}5\,\text{cm}^2$.

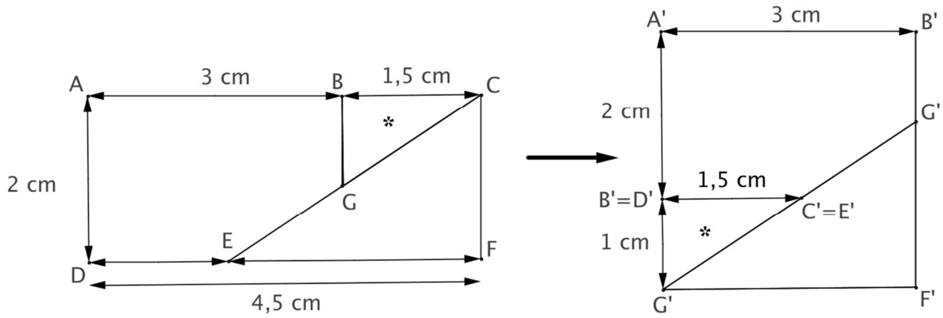


2ª solução: O quadrado pode ser decomposto em 16 quadradinhos de lado igual à largura da fita, como na figura à direita. Como o lado do quadrado mede 6 cm, o lado de cada quadradinho mede 1,5 cm. Logo os lados do retângulo destacado medem 1,5 cm e 3 cm e, como acima, seu perímetro é 9 cm e sua área é 4,5 cm².



Alternativamente, o quadrado pode ser decomposto em 8 retângulos congruentes ao retângulo destacado, conforme figura à esquerda. Como a área do quadrado é 36 cm², a área do retângulo destacado é $36\div 8=4{,}5$ cm².

c) Na figura abaixo mostramos o retângulo e o quadrado, com pontos correspondentes indicados com a mesma letra; por exemplo, o segmento AB à esquerda corresponde ao segmento A'B' à direita. A área do retângulo é $2\times 4{,}5=9$ cm², que é também a área do quadrado; logo o lado do quadrado mede 3 cm. Desse



modo, os segmentos A'B' e B'F' medem 3 cm e assim AB mede 3 cm. Como o lado do retângulo mede 4,5 cm, segue que BC mede $4{,}5-3=1{,}5$ cm, que é então a medida de B'C'. Finalmente, a medida de A'B é a mesma que a de AD, que é 2 cm; logo a medida de B'C' é $3-2=1$ cm. Assim, obtemos as medidas $BG=1$ cm e $BC=1{,}5$ cm dos catetos do triângulo retângulo BCG, cuja área é então $\frac{1}{2}\times 1\times 1{,}5=0{,}75$ cm².

Questão 4 – Solução

a) Cristina pode preencher cada uma das três linhas do cartão de 6 maneiras diferentes; logo o número de maneiras de preencher o cartão é $6\times6\times6=216$.

b) Se os ratinhos escolhem casinhas diferentes, então o primeiro tem 6 escolhas possíveis, o segundo tem 5 escolhas possíveis e o terceiro tem 4. Logo o número de maneiras em que Cristina pode preencher o cartão é $6\times5\times4=120$

c) *1ª solução:* Há três pares de ratinhos: ML, MT e LT. Os cartões que Cristina deve preencher correspondem a um par de ratinhos escolher uma casinha e o terceiro ratinho escolher uma casinha diferente. Logo o número de cartões deve ser $3\times6\times5=90$.

2ª solução: Para preencher um cartão supondo que dois ratinhos se esconderão na mesma casinha e o terceiro em uma casinha diferente, Cristina deve colocar duas marcas "X" em uma mesma coluna e uma marca "X" em uma coluna diferente. Para colocar as duas marcas "X" ela tem 6 escolhas de coluna e, depois disso, 3 maneiras de colocar os dois "X" nessa coluna (1ª e 2ª linhas, 1ª e 3ª linhas e 2ª e 3ª linhas), num total de $6\times3=18$ maneiras. Isso feito, ela tem 5 escolhas para colocar o terceiro "X", o que nos dá o total de $18\times5=90$ cartões.

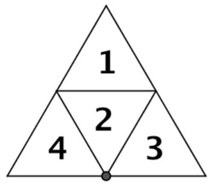
Observamos que a 1ª e a 2ª solução são essencialmente a mesma.

3ª solução: Os ratinhos podem se esconder nas casinhas de três maneiras diferentes:

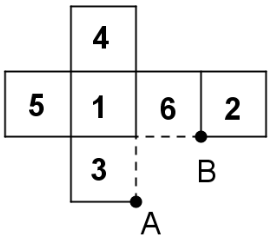
- os três na mesma casinha; temos aqui 6 possibilidades, uma para cada casinha;
- os três em três casinhas diferentes; temos aqui 120 possibilidades, que calculamos no item (b);
- dois em uma mesma casinha e o terceiro em uma outra casinha, que é o que queremos calcular.

Assim, para achar o número procurado, basta subtrair do número total de preenchimentos possíveis as possibilidades para os outros dois casos; o resultado é então $216-6-120=90$, como antes.

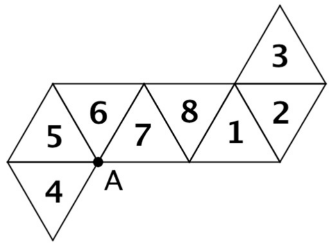
Questão 5 – Solução



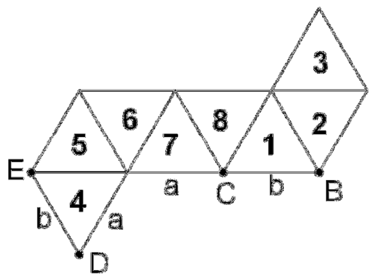
a) Na pirâmide cada vértice pertence a três faces. O ponto assinalado se tornará o vértice das faces com os números 2, 3 e 4 ; como esses são os três maiores números que aparecem nas faces, esse vértice terá a maior soma, que é $2+3+4=9$.



b) Em um cubo, cada vértice pertence a três faces. Ao montar o cubo, as arestas pontilhadas na figura ao lado coincidirão, o mesmo acontecendo com os pontos A e B. Vemos assim que as faces que se encontram no vértice correspondente ao ponto A são as faces com os números 3, 6 e 2; logo o valor desse vértice é $3+6+2=11$.



c) Em um octaedro, cada vértice pertence a quatro faces. A figura mostra que, ao formar o octaedro, o ponto A será o vértice comum das faces com os números 4, 5, 6 e 7; logo seu valor será $4+5+6=7=22$.

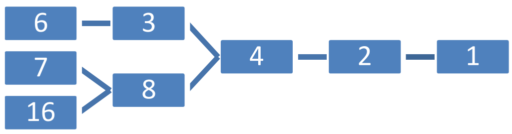


d) Ao montar o octaedro, os dois segmentos indicados pela letra *a* formarão uma aresta e os pontos C e D coincidirão. Logo os segmentos indicados por *b* também coincidirão e o ponto B será levado no ponto E. Desse modo, as faces que têm o vértice correspondente a B em comum são as faces com os números 1, 2, 4 e 5; o valor desse vértice é então $1+2+4+5=12$.

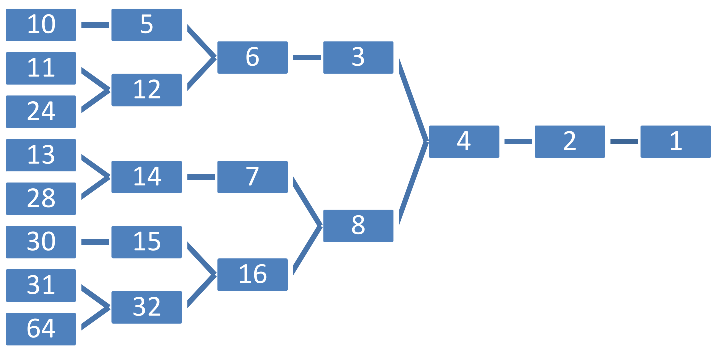
<u>Questão 6 – Solução</u>

a) A sequência é $37 \to 38 \to 19 \to 20 \to 10 \to 5 \to 6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$.

b) A única sequência de comprimento 3 é $4 \to 2 \to 1$. As sequências de comprimento 4 são $3 \to 4 \to 2 \to 1$ e $8 \to 4 \to 2 \to 1$; elas são obtidas a partir de $4 \to 2 \to 1$, a primeira acrescentando $4 - 1 = 3$ à esquerda e a segunda acrescentando $2 \times 4 = 8$ à esquerda. Do mesmo modo, a sequência ímpar $3 \to 4 \to 2 \to 1$ dá origem à sequência par $6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$; a sequência par $8 \to 4 \to 2 \to 1$ dá origem à sequência ímpar $7 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$ e à sequência par $16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$. Temos assim as três únicas sequências de comprimento 5, sendo 2pares e 1 ímpar. O raciocínio pode ser representado pelo esquema abaixo.



c) *1ª solução:* Repetindo o esquema do item anterior, temos:



e assim temos 3 sequências pares e 2 ímpares de comprimento 6 e 5 sequências pares e 3 ímpares de comprimento 7.

2ª solução: Observamos que a sequência ímpar de comprimento cinco dá origem a 1 sequência par de comprimento seis; já as 2 sequências pares de comprimento cincodão origem a 2 sequências pares de comprimento seis e 2 sequências ímpares de comprimento seis. Assim, temos 2 sequências ímpares de comprimento seis e $1 + 2 = 3$ sequências pares de comprimento seis, num total de $2 + 3 = 5$ sequências de comprimento 6. O mesmo argumento mostra que há 8 sequências de comprimento sete, sendo três ímpares e cinco pares.

Observação: A repetição desse argumento para valores sucessivos do comprimento mostra que, a partir do comprimento 3, o número de sequências ímpares é 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8,..., o número de sequências pares é 2, 3, 5, 8, 13,... e o número total de sequências é 3, 5, 8, 13, 21, ... Cada termo dessas sequências de valores, a partir do terceiro, é a soma dos dois anteriores; vemos assim que essas sequências, com a eventual omissão de termos iniciais, são a sequência 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,..., conhecida como *sequência de Fibonacci*. Apresentamos esse resultado na tabela a seguir.

comprimento	**5**	**6**	**7**	**...**	**15**	**16**
Ímpares	1	2	3	...	144	233
pares	2	$2+1=3$	$3+2=5$	...	233	$233+144=377$
total	$1+2=3$	$2+3=5$	$3+5=8$	...	$144+233=377$	$233+377=610$

d) *1ª solução:* As 144 sequências ímpares de comprimento quinze dão origem a 144 sequências pares de comprimento dezesseis; já as 233 sequências pares de comprimento quinze dão origem a 233 sequências pares de comprimento dezesseis e 233 sequências ímpares de comprimento dezesseis. Assim, temos 233 sequências ímpares de comprimento dezesseis e $377=233+144$ sequências pares de comprimento dezesseis, num total de $233+377=610$ sequências.

2ª solução: A parte da sequência de Fibonacci que nos interessa é 1, 2, 3, 5, 8,....., 144, 233, 377, 610,... . O número de sequências ímpares de comprimento 15 (resp. 16) é o 15º (resp. 16º) termo dessa sequência, que é 144 (resp. 233); o número de sequências pares de comprimento 15 (resp.16) é o 16º (resp. 17º) termo, que é 233 (resp. 377) e o número total é o 17º (resp. 18º) termo, que é 377 (resp. 610).