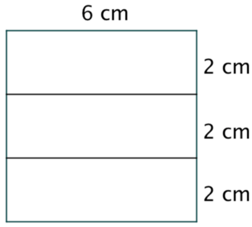
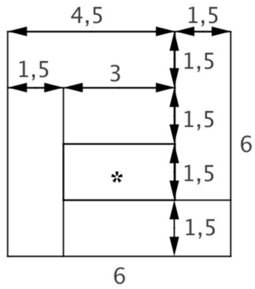
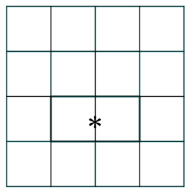
Questão 1 – Solução



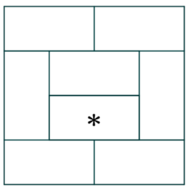
a) Como o quadrado formado com os três retângulos recortados da primeira tira tem área 36 cm^2, seu lado mede 6 cm. Logo o comprimento dos retângulos é 6 cm e sua largura é um terço de seu comprimento, ou seja, 2 cm.



b) *1ª solução:* Como no item anterior, o lado do quadrado formado com os seis retângulos recortados da segunda tira mede 6 cm. Como todos os retângulos tem a mesma largura, a figura mostra que essa largura é um quarto da medida do lado, isto é, 1,5 cm. As medidas dos outros retângulos são então determinadas imediatamente, como indicado. Em particular, as dimensões do retângulo destacado são 3 cm e 1,5 cm; logo seu perímetro é $1{,}5+1{,}5+3+3+9=9\,\text{cm}$ e sua área é $1{,}5\times 3=4{,}5\,\text{cm}^2$.

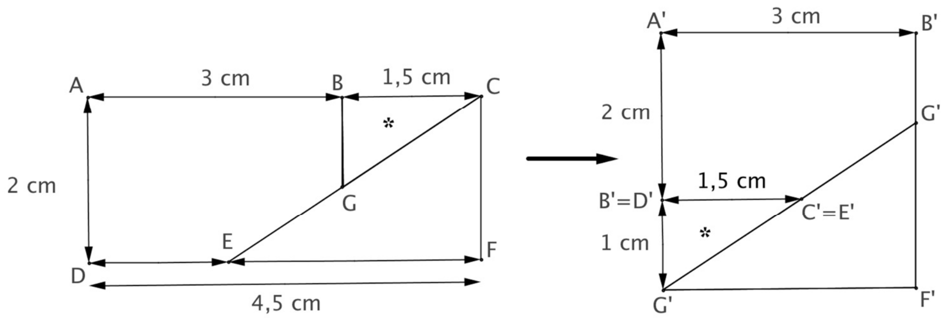


2ª solução: O quadrado pode ser decomposto em 16 quadradinhos de lado igual à largura da fita, como na figura à direita. Como o lado do quadrado mede 6 cm, o lado de cada quadradinho mede 1,5 cm. Logo os lados do retângulo destacado medem 1,5 cm e 3 cm e, como acima, seu perímetro é 9 cm e sua área é 4,5 cm^2.



Alternativamente, o quadrado pode ser decomposto em 8 retângulos congruentes ao retângulo destacado, conforme figura à esquerda. Como a área do quadrado é 36 cm^2, a área do retângulo destacado é $36\div 8=4{,}5$ cm^2.

c) Na figura abaixo mostramos o retângulo e o quadrado, com pontos correspondentes indicados com a mesma letra; por exemplo, o segmento AB à esquerda corresponde ao segmento A'B'à direita. A área do retângulo é $2\times 4{,}5=9$ cm^2, que é também a área do quadrado; logo o lado do quadrado mede 3 cm. Desse



modo, os segmentos A'B' e B'F' medem 3 cm e assim AB mede 3 cm. Como o lado do retângulo mede 4,5 cm, segue que BC mede $4{,}5-3=1{,}5\,\text{cm}$, que é então a medida de B'C'. Finalmente, a medida de A'B é a mesma que a de AD, que é 2 cm; logo a medida de B'C' é $3-2=1\text{cm}$. Assim, obtemos as medidas $BG=1\,\text{cm}$ e $BC=1{,}5\,\text{cm}$ dos catetos do triângulo retângulo BCG, cuja área é então $\frac{1}{2}\times 1\times 1{,}5=0{,}75$ cm^2.

Questão 2 – Solução

a) Gabriela vai dizer o número $\{[(2\times 4+3)\times 5+6]\times 10\}+1=611$.

b) Se os números dos dados são, em ordem, *a*, *b* e *c*, o número anunciado por Gabriela é $\{[(2\times a+3)\times 5+b]\times 10\}+c=100a+10b+c+150$. Assim, Otávio sabe que ao subtrair 150 do número anunciado por Gabriela o resultado terá *a*, *b* e *c* como os algarismos das centenas, dezenas e unidades, respectivamente. Como Gabriela anunciou 273 e $273-150=123$, Otávio vai dizer 1, 2 e 3.

2ª solução: No resultado final o número do terceiro dado é somado a um múltiplo de 10, logo o número do terceiro dado é 3 (pois os números de um dado vão de 1 a 6). Agora $\dfrac{273-3}{10}=27$ é o resultado da soma do número do segundo dado com um múltiplo de 5; logo o número do segundo dado é 2. Finalmente, $\dfrac{27-2}{5}=5$ é o resultado da soma de 3 com o número do primeiro dado multiplicado por 2; logo o número do primeiro dado é $\dfrac{5-3}{2}=1$.

c) *1ª solução:* Temos $432-150=282$; logo, para anunciar o resultado 432, Gabriela deveria ter obtido os números 2, 8 e 2, o que não pode acontecer, pois o 8 não aparece nos dados.

2ª solução: com o mesmo raciocínio da solução acima, chegamos a $\dfrac{8-3}{2}=2{,}5$, que não é inteiro.

3ª solução: O terceiro dado deve mostrar 2. Se a é o número do primeiro dado e b do segundo, chegamos a $43-b=5\,(2a+3)$, donde $28=10a+b$, que não tem solução em inteiros $1\leq a,b\leq 6$.

Questão 3 – Solução

a) Os primeiros múltiplos naturais de 20 são 20, 40, 60, 80 e 100. Logo o múltiplo irado de 20 é 100.

b) Se os algarismos de um número divisível por 9 são apenas 0 e 1, nesse número devem aparecer pelo menos nove algarismos 1. Para que esse múltiplo seja o menor possível, ele deve ter o menor número de algarismos possível; logo o múltiplo irado de 9 é 111111111.

c) Um múltiplo de 45 é múltiplo de 5 e 9; logo seu algarismo das unidades é 0 ou 5 e a soma de seus algarismos é divisível por 9. Como múltiplos irados são formados apenas pelos algarismos 0 e 1, segue que o múltiplo irado de 45 deve ter 0 como algarismo das unidades; logo esse múltiplo é 1111111110.

d) O número 1110 é o menor número que tem apenas os algarismos 0 e 1 que é, ao mesmo tempo,

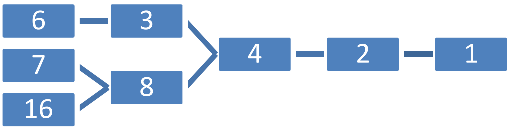
- múltiplo de 3, pois a soma de seus algarismos é 3;
- múltiplo de 2, pois seu último algarismo é 0.

Logo 1110 é o múltiplo irado de 6. Como os múltiplos irados de 1, 2, 3, 4 e 5 são, respectivamente, 1, 10, 111, 100 e 10, segue que o menor número cujo múltiplo irado é 1110 é 6.

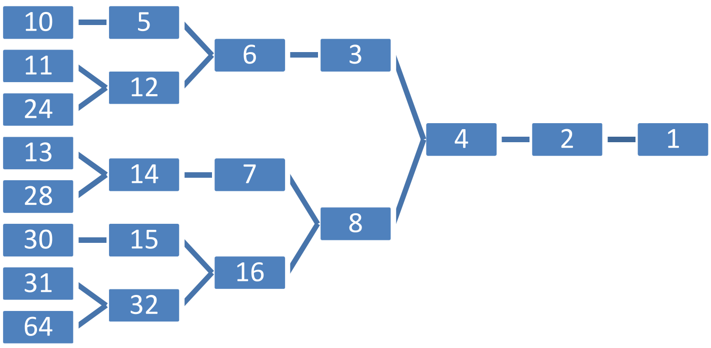
Questão 4 – Solução

a) A sequência é $37 \rightarrow 38 \rightarrow 19 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

b) A única sequência de comprimento 3 é $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. As sequências de comprimento 4 são $3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ e $8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$; elas são obtidas a partir de $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, a primeira acrescentando $4-1=3$ à esquerda e a segunda acrescentando $2 \times 4 = 8$ à esquerda. Do mesmo modo, a sequência ímpar $3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ dá origem à sequência par $6 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$; a sequência par $8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ dá origem à sequência ímpar $7 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ e à sequência par $16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Temos assim as três únicas sequências de comprimento 5, sendo 2 pares e 1 ímpar. O raciocínio pode ser representado pelo esquema abaixo.



c) *1ª solução:* Repetindo o esquema do item anterior, temos:



e assim temos 3 sequências pares e 2 ímpares de comprimento 6 e 5 sequências pares e 3 ímpares de comprimento 7.

2ª solução: Observamos que a sequência ímpar de comprimento cinco dá origem a 1 sequência par de comprimento seis; já as 2 sequências pares de comprimento cinco dão origem a 2 sequências pares de comprimento seis e 2 sequências ímpares de comprimento seis. Assim, temos 2 sequências ímpares de comprimento seis e $1+2=3$ sequências pares de comprimento seis, num total de $2+3=5$ sequências de comprimento 6. O mesmo argumento mostra que há 8 sequências de comprimento sete, sendo três ímpares e cinco pares.

Observação: A repetição desse argumento para valores sucessivos do comprimento mostra que, a partir do comprimento 3, o número de sequências ímpares é 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8,..., o número de sequências pares é 2, 3, 5, 8, 13,... e o número total de sequências é 3, 5, 8, 13, 21, ... Cada termo dessas sequências de valores, a partir do terceiro, é a soma dos dois anteriores; vemos assim que essas sequências, com a eventual omissão de termos iniciais, são a sequência 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,..., conhecida como *sequência de Fibonacci*. Apresentamos esse resultado na tabela a seguir.

comprimento	**5**	**6**	**7**	**...**	**15**	**16**
ímpares	1	2	3	...	144	233
pares	2	$2+1=3$	$3+2=5$	...	233	$233+144=377$
total	$1+2=3$	$2+3=5$	$3+5=8$	...	$144+233=377$	$233+377=610$

d) *1ª solução:* As 144 sequências ímpares de comprimento quinze dão origem a 144 sequências pares de comprimento dezesseis; já as 233 sequências pares de comprimento quinze dão origem a 233 sequências pares de comprimento dezesseis e 233 sequências ímpares de comprimento dezesseis. Assim, temos 233 sequências ímpares de comprimento dezesseis e $377=233+144$ sequências pares de comprimento dezesseis, num total de $233+377=610$ sequências.

2ª solução: A parte da sequência de Fibonacci que nos interessa é 1, 2, 3, 5, 8,....., 144, 233, 377, 610,... . O número de sequências ímpares de comprimento 15 (resp. 16) é o 15º (resp. 16º) termo dessa sequência, que é 144 (resp. 233); o número de sequências pares de comprimento 15 (resp.16) é o 16º (resp. 17º) termo, que é 233 (resp. 377) e o número total é o 17º (resp. 18º) termo, que é 377 (resp. 610).

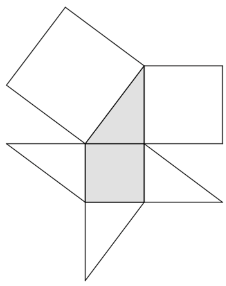
Questão 5 – Solução

a) Se João pintar o quadrado de azul, ele terá as escolhas vermelho e amarelo para o triângulo. Se ele pintar o quadrado de vermelho, ele terá as escolhas azul e amarelo para o triângulo. Finalmente, se ele pintar o quadrado de verde, ele terá as escolhas azul, vermelho e amarelo para o triângulo. Logo ele pode pintar a figura de $2+2+3=7$ maneiras diferentes.

b) *1ª solução:* Se João escolher azul ou vermelho para o triângulo, cada um dos quadrados poderá ser pintado de duas cores; se ele escolher amarelo para o triângulo, cada quadrado poderá ser pintado de três cores. Logo o número da maneiras diferentes de pintar essa figura é $2\times2\times2\times2+1\times3\times3\times3=43$.

2ª solução:

- Se o quadrado de baixo é amarelo, o triângulo do meio pode ser verde, com 3 × 3 = 9 possibilidades para pintar os quadrados restantes, ou vermelho ou azul; em cada um desses casos, há 2 × 2 = 4 modos de pintar os quadrados. Assim, há 9 + 2 × 4 = 17 possibilidades com o quadrado inferior amarelo.
- Se o quadrado de baixo é vermelho ou azul, o triângulo do meio pode ser verde, novamente com 9 possibilidades para pintar os quadrados restantes ou azul/vermelho, com 4 possibilidades para os quadrados restantes. Assim, há 2 × (9 + 4) = 26 possibilidades com o quadrado inferior azul ou vermelho.
- Portanto, a figura pode ser colorida de 17 + 26 = 43 modos.



c) *1ª solução:* Se João escolher azul ou vermelho para o quadrado sombreado, os triângulos adjacentes poderão ser pintados de $2\times2\times2\times2$ maneiras diferentes; em metade dessas maneiras o triângulo sombreado é azul ou vermelho, caso em que os quadrados adjacentes poderão ser pintados de 2×2 maneiras e na outra metade ele é amarelo, quando os quadrados adjacentes poderão ser pintados de 3×3 maneiras diferentes. Nesse caso, a figura poderá ser pintada de $2\times2\times2\times2\times(1\times2\times2+1\times3\times3)=208$ maneiras diferentes.

Se ele escolher verde para o quadrado sombreado, os triângulos adjacentes poderão ser pintados de $3\times3\times3\times3$ maneiras diferentes; em dois terços dessas maneiras o triângulo sombreado é azul ou vermelho, caso em que os quadrados adjacentes poderão ser pintados de 2×2 maneiras e no terço restante ele é amarelo, quando os quadrados adjacentes poderão ser pintados de 3×3 maneiras diferentes. Nesse caso, a figura poderá ser pintada de $3\times3\times3\times(2\times2\times2+1\times3\times3)=459$ maneiras diferentes. No total, a figura poderá ser pintada de $208+459=667$ maneiras diferentes.

2ª solução: Se João escolher azul ou vermelho para o triângulo sombreado, os quadrados adjacentes poderão ser pintados de $2\times2\times2$ maneiras diferentes; em metade dessas maneiras o quadrado sombreado é azul ou vermelho, caso em que os triângulos adjacentes poderão ser pintados de $2\times2\times2$ maneiras e na outra metade ele é amarelo, quando os quadrados adjacentes poderão ser pintados de $3\times3\times3$ maneiras diferentes. Nesse caso, a figura poderá ser pintada de $2\times2\times2\times(1\times2\times2\times2+1\times3\times3\times3)=280$ maneiras diferentes.

Se ele escolher amarelo para o triângulo sombreado, os quadrados adjacentes poderão ser pintados de $3\times3\times3$ maneiras diferentes; em dois terços dessas maneiras o quadrado sombreado é azul ou vermelho, caso em que os triângulos adjacentes poderão ser pintados de $2\times2\times2$ maneiras e no terço restante ele é verde, quando os quadrados adjacentes poderão ser pintados de $3\times3\times3$ maneiras diferentes. Nesse caso, a figura poderá ser pintada de $3\times3\times(2\times2\times2\times2+1\times3\times3\times3)=387$ maneiras diferentes. No total, a figura poderá ser pintada de $280+387=667$ maneiras diferentes.

3ª solução:

Contando separadamente as formas de pintar para cada um dos 7 modos de pintar o quadrado central e o triângulo superior

Quadrado central	Triângulo de cima	Triângulos de baixo	Quadrados de cima	Possibilidades
Azul	Vermelho	$2\times2\times2$	2×2	$2\times2\times2\times2\times2=32$
Vermelho	Azul	Idem	Idem	$2\times2\times2\times2\times2=32$
Azul	Amarelo	$2\times2\times2$	3×3	$2\times2\times2\times3\times3=72$
Vermelho	Amarelo	Idem	Idem	$2\times2\times2\times3\times3=72$
Verde	Vermelho	$3\times3\times3$	2×2	$3\times2\times3\times2\times1=108$
Verde	Azul	Idem	Idem	$3\times3\times3\times2\times2=108$
Verde	Amarelo	$3\times3\times3$	3×3	$3\times3\times3\times3\times4=243$

Total: $32+32+72+72+108+108+243=667$

Agrupando as possibilidades azul/vermelho para cada figura

Quadrado central	Triângulo de cima	Triângulos de baixo	Quadrados de cima	Possibilidades
Azul ou Vermelho (2)	Vermelho ou Azul (1)	$2\times2\times2$	2×2	$2\times1\times2\times2\times2\times2\times2=64$
Azul ou Vermelho (2)	Amarelo (1)	$2\times2\times2$	3×3	$2\times1\times2\times2\times2\times3\times3=144$
Verde (1)	Vermelho, Azul (2)	$3\times3\times3$	2×2	$1\times2\times3\times3\times3\times2\times2=216$
Verde (1)	Amarelo (1)	$3\times3\times3$	3×3	$1\times1\times3\times3\times3\times3\times3=243$

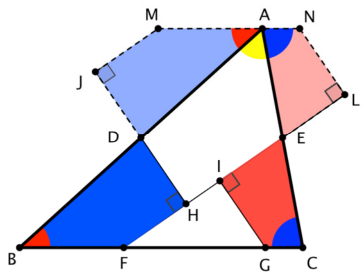
Total: $64+144+216+243=667$

4ª solução (usando a 2ª solução do item (b)):

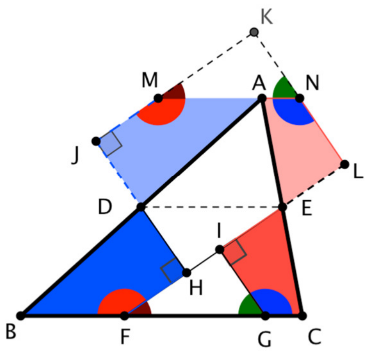
- Se o quadrado inferior é amarelo, os triângulos de baixo podem ser pintados de $3\times3\times3=27$ modos. Se ele é azul ou vermelho, os triângulos de baixo podem ser pintados de $2\times2\times2=8$ modos.
- Logo, o número total de possibilidades é $17\times27+26\times8=459+208=667$ 17 × 27 + 26 × 8 = 459 + 208 = 667

Questão 6 – Solução

a) *1ª solução:* Na figura ao lado marcamos, em vermelho, o ângulo em B do triângulo *ABC* e o ângulo correspondente no polígono *AMJD*; em azul, marcamos o ângulo em C do triângulo ABC e o ângulo correspondente do polígono *AELN*. Podemos observar na parte superior da figura que o ângulo $\widehat{MAN}$ é a soma desses dois ângulos com o ângulo em A do triângulo *ABC*; como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, segue que $\widehat{MAN} = 180^\circ$. Logo *M*, *A* e *N* estão alinhados.



2ª solução: Observamos primeiro que *AM* é paralelo a *BF*, pois ele é obtido de *BF* por meio de uma rotação de 180°; do mesmo modo, *AN* é paralelo a *CG*. Como *BF* e *CG* estão na mesma reta suporte e *AM* e *AN* tem o ponto A em comum, segue que os pontos *M*, *A* e *N* estão alinhados.

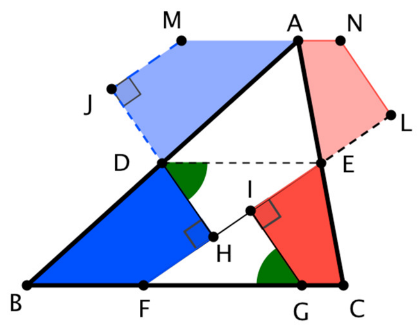


b) Na figura os ângulos marcados em vermelho são congruentes, assim como os ângulos marcados em azul. Segue que os ângulos marcados em marrom também são congruentes, pois são ambos suplementos do ângulo vermelho; do mesmo modo, os ângulos verdes são também congruentes. Notamos agora que

$$MN = MA + AN = BF + CG = BC - FG = 2FG = FG = FG$$

Segue pelo critério ALA que os triângulos FGI e MNK são congruentes.

c) Na figura ao lado traçamos a base média *DE* do triângulo *ABC.* O teorema da base média nos diz que *DE* é paralelo a *BC* e que $DE = \frac{1}{2}BC = FG$. Segue que os triângulos *FG*I e *EHD* são congruentes, pois são retângulos, tem os ângulos verdes congruentes (pois são agudos de lados paralelos) e hipotenusas congruentes. Em particular, temos $FI = EH$, donde $FH = FI - HI = EH - HI = EI$. Logo $LH = LE + EI + IH = FH + HI + IE = EF$.



d) A área do quadrado *HJKL* é igual à área do triângulo *ABC*, que é 9; logo o lado do quadrado mede 3. Em particular, $LH = 3$ e segue do item anterior que $EF = 3$.