Questão 1 – Solução

a) Primeiro notamos que é possível preencher o quadriculado de acordo com o enunciado; um exemplo está ao lado. Observamos agora que, qualquer que seja a maneira de preencher o quadriculado, o enunciado mostra que não podem aparecer números repetidos nos quadradinhos centrais, pois se houver dois números iguais eles estarão na mesma linha, ou na mesma coluna ou na mesma diagonal. Devem então aparecer os números 1, 3, 7 e 8 nesses quadradinhos, com a soma $1+3=7=8=19$.

3	8	7	1
7	1	3	8
1	7	8	3
8	3	1	7

b) Conforme observado no item anterior, nos quatro quadradinhos centrais devem aparecer os números 1, 3, 7 e 8. Segue que nos quadradinhos marcadas com x devem aparecer os números 1 e 8, o que pode ser feito de duas maneiras; a partir daí o quadriculado pode ser completado de modo único, como mostrado abaixo. Logo é possível preencher o quadriculado inicial de exatamente duas maneiras distintas.

1			
	3	x	
	x	7	
			8

1	7	8	3
8	3	1	7
3	8	7	1
7	1	3	8

1	8	3	7
7	3	8	1
8	1	7	3
3	7	1	8

c) *1ª solução:* O problema, com letras *a*, *b*, *c* e *d* em vez números e com a diagonal já preenchida, como na figura ao lado, admite apenas duas soluções, que apresentamos abaixo.

a			
	b		
		c	
			d

a	**c**	d	b
d	b	**a**	c
b	**d**	c	**a**
c	a	**b**	d

a	**d**	b	c
c	b	**d**	a
d	**a**	c	**b**
b	c	**a**	d

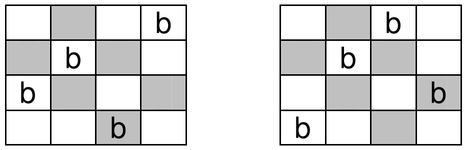
Em ambas, a soma dos quadradinhos cinzentos é $2a+2b+c+d$. Para que essa soma seja máxima, basta escolher os dois maiores valores possíveis para as letras que aparecem multiplicadas por 2; a soma máxima é então $2\times 8+2\times 7+3+1=34$.

2ª solução: Notamos primeiro que o enunciado do problema mostra que cada número aparece exatamente quatro vezes em um quadriculado corretamente preenchido. Suponhamos, como acima, o quadriculado preenchido com as letras *a*, *b*, *c* e *d*,nessa ordem, na diagonal principal. O diagrama abaixo mostra as duas únicas maneiras de distribuir os quatro *a*'s pelo quadriculado de acordo com o enunciado. Vamos assim que, em qualquer caso, aparecem dois *a*'s nas casas sombreadas, e o mesmo acontece com *d*.

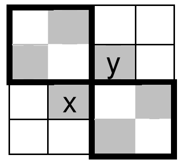
a			
		a	
			a
	a		

a			
			a
	a		
		a	

Os diagramas a seguir representam as possíveis posições dos *b*'s; vemos assim que, em qualquer caso, aparece exatamente um *b* nas casas sombreadas, e o mesmo acontece com *c*.



Desse modo, a soma dos algarismos nas casas sombreadas é $2(a+d)+b+c$, e a partir daí procedemos como na primeira solução.

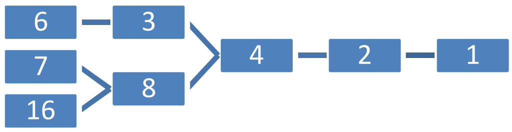


3ª solução: Consideremos o quadriculado ao lado, onde x e y denotam os números que aparecem nas casas correspondentes. O mesmo argumento utilizado no início do item (b) mostra que a soma dos números que aparecem em cada um dos quadriculados 2x2 destacados é $1+3+7+8=19$. Por outro lado, a soma dos números na diagonal também é 19; logo a soma dos números nas casas cinzentas dos dois quadriculados 2x2 é $2\times 19-19=19$. Segue que a soma dos números nas casas cinzentas é $19+x+y$; para que ela seja máxima, basta escolher os valores 7 e 8 para x e y, e chegamos à soma $19+7+8=34$.

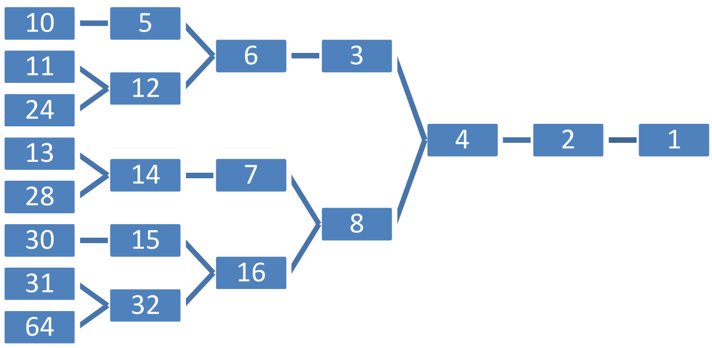
Questão 2 – Solução

a) A sequência é $37 \to 38 \to 19 \to 20 \to 10 \to 5 \to 6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$.

b) A única sequência de comprimento 3 é $4 \to 2 \to 1$. As sequências de comprimento 4 são $3 \to 4 \to 2 \to 1$ e $8 \to 4 \to 2 \to 1$; elas são obtidas a partir de $4 \to 2 \to 1$, a primeira acrescentando $4-1=3$ no início da sequência e a segunda acrescentando $2\times 4=8$ no início da sequência. Do mesmo modo, a sequência ímpar $3 \to 4 \to 2 \to 1$ dá origem à sequência par $6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$ e a sequência par $8 \to 4 \to 2 \to 1$ dá origem à sequência ímpar $7 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$ e à sequência par $16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$. Temos assim as três únicas sequências de comprimento 5, sendo duas delas pares e uma ímpar. O raciocínio pode ser representado pelo esquema abaixo.



c) *1ª solução:* Repetindo o esquema do item anterior, temos:



e assim temos 3 sequências pares e 2 ímpares de comprimento 6 e 5 sequências pares e 3 ímpares de comprimento 7.

2ª solução: Observamos que a sequência ímpar de comprimento cinco vai gerar 1 sequência par de comprimento seis; já as 2 sequências pares de comprimento cinco vão gerar 2 sequências pares de comprimento seis e 2 sequências ímpares de comprimento seis. Assim, temos 2 sequências ímpares de comprimento seis e $1+2=3$ sequências pares de comprimento seis, num total de $2+3=5$ sequências de comprimento 6. O mesmo argumento mostra que há 8 sequências de comprimento sete, sendo três ímpares e cinco pares..

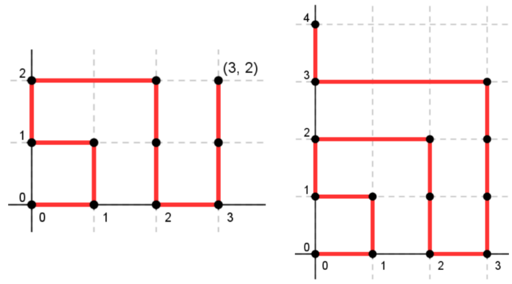
Observação: A repetição desse argumento para valores sucessivos do comprimento mostra que, a partir do comprimento 3, o número de sequências ímpares é 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8,..., o número de sequências pares é 2, 3, 5, 8, 13,... e o número total de sequências é 3, 5, 8, 13, 21, ... Cada termo dessas sequências de valores, a partir do terceiro, é a soma dos dois anteriores; vemos assim que essas sequências, com a eventual omissão de termos iniciais, são a sequência 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,..., conhecida como *sequência de Fibonacci*.

comprimento	**5**	**6**	**7**	**...**	**15**	**16**
Ímpares	1	2	3	...	144	233
pares	2	$2+1=3$	$3+2=5$	...	233	$233+144=377$
total	$1+2=3$	$2+3=5$	$3+5=8$	...	$144+233=377$	$233+377=610$

d) *1ª solução:* As 144 sequências ímpares de comprimento quinze vão gerar 144 sequências pares de comprimento dezesseis; já as 233 sequências pares de comprimento quinze vão gerar 233 sequências pares de comprimento dezesseis e 233 sequências ímpares de comprimento dezesseis. Assim, temos 233 sequências ímpares de comprimento dezesseis e $377=233+144$ sequências pares de comprimento dezesseis, num total de $233+377=610$ sequências.

2ª solução: A parte da sequência de Fibonacci que nos interessa é 1, 2, 3, 5, 8,....., 144, 233, 377, 610,... . O número de sequências ímpares de comprimento 15 (resp. 16) é o 15º (resp. 16º) termo dessa sequência, que é 144 (resp. 233); o número de sequências pares de comprimento 15 (resp.16) é o 16º (resp. 17º) termo, que é 233 (resp. 377) e o número total é o 17º (resp. 18º) termo, que é 377 (resp. 610).

Questão 3 – Solução



a) Por contagem direta, vemos que a lonjura de (3,2) é 11 e a de (0,4) é 16.

b) Os pontos de coordenadas inteiras no interior e nos lados desse quadrado formam $n+1$ linhas, cada uma com $n+1$ pontos; o total de pontos no interior e nos lados desse quadrado é então $(n+1)^2$. Excluindo a borda desse quadrado, sobra um quadrado de $n-1$ linhas e $n-1$ colunas, que contém $(n-1)^2$ pontos inteiros; segue que o número de pontos na borda do quadrado original é $(n+1)^2-(n-1)^2=4n$.

Pode-se também calcular o número de pontos de coordenadas inteiras no quadrado notando que de (0,0) a (0,1) a poligonal passa por $1+3=2^2$ pontos; de (0,0) a (2,0) a poligonal passa por $1+3+5=3^2$ pontos, de (0,0) a (0,3) a poligonal passa por $1+3+5+7=4^2$ pontos e assim por diante. Logo o número de pontos inteiros do quadrado que tem um de seus vértices no ponto (n,n) é $(n+1)^2$.

c) *1ª solução:* para ir de (0,0) até (1,1) são 2 passos, de (1,1) até (2,2) são 4 passos, de (2,2) até (3,3) são 6 passos e assim por diante. Logo para chegar ao ponto (n,n) serão necessários $2+4+6+\ldots+2n=2\cdot(1+2+3+\ldots+n)=2\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}=n^2+n$ passos.

2ª solução: A poligonal chega ao ponto (n,n) passando por todos os pontos com coordenadas inteiras do interior e da borda do quadrado do item anterior, com a exceção dos n pontos da horizontal de $(0,n)$ até $(n-1,n)$, caso n seja ímpar ou da vertical de $(n,0)$ até $(n,n-1)$, caso n seja par. Logo a poligonal passa por $(n+1)^2-n=n^2+n+1$ pontos, incluindo seus extremos, e seu comprimento é então n^2+n.

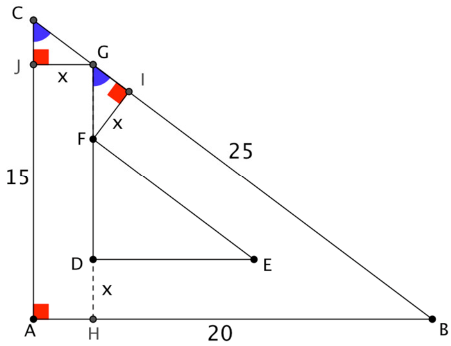
d) *1ª solução:* Como $425=(20^2+20)+5$ e 20^2+20 é a lonjura do ponto (20,20), vemos que para chegar ao ponto de lonjura 425 devemos chegar a (20,20) e andar mais 5 segmentos ao longo da poligonal. Como 20 é par, esses segmentos partirão do ponto (20,20) na vertical para baixo; assim chegamos ao ponto (20,15), que é o ponto procurado.

*2ª solução:*para ir de (0,0) até (1,1) são 2 passos; de (1,1) até (2,2) são 4 passos, de (2,2) até (3,3) são 6 passos e assim por diante. Logo, para chegar ao ponto (20,20), serão necessários $2+4+6+\ldots+40=2\cdot(1+2+3+\ldots+20)=2\cdot 210=420$ passos. A partir daí a solução procede como acima.

Questão 4– Solução

a) Como os triângulos *HBG* e *ABC* têm lados paralelos, eles são semelhantes. Logo $\frac{HG}{AC}=\frac{HB}{AB}=\frac{20-x}{20}$ e segue que $GH=\frac{20-x}{20}AC=\frac{20-x}{20}\cdot 15=\frac{3}{4}(20-x)$.

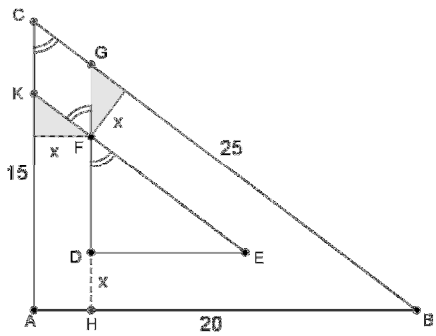
b) *1ª solução:* Construímos os triângulos *IFG* e *JGC* como na figura ao lado. Eles são congruentes, pois possuem um cateto de medida *x* e os ângulos marcados em azul têm a mesma medida; logo suas hipotenusas são congruentes, isto é, $FG=GC$.



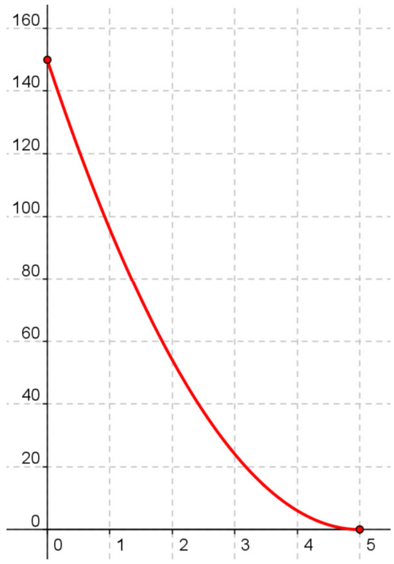
Notamos agora que os triângulos *JGC* e *ABC* são semelhantes, pois são retângulos e têm um ângulo comum. Logo $\frac{GC}{x}=\frac{BC}{AC}=\frac{25}{20}=\frac{5}{4}$ e segue que $GC=\frac{5}{4}x$. Como $FG=GC$, temos $FG=\frac{5}{4}x$.

Alternativamente, podemos argumentar que os triângulos *IFG* e *ABC* são semelhantes; segue que $\frac{FG}{x}=\frac{BC}{AB}=\frac{25}{20}=\frac{5}{4}$ e então $FG=\frac{5}{4}x$, como antes.

2ª solução: Na figura ao lado, observamos que os ângulos marcados em *F* têm a mesma medida, pois são opostos pelo vértice e, por outro lado, são iguais ao ângulo em *C* por paralelismo. A congruência dos triângulos sombreados na figura (mostrada de modo semelhante ao utilizado na 1ª solução) mostra que $FK=FG$, e segue que *CKFG* é um losango; em particular, temos $CG=FG$. O cálculo de $FG=\frac{5}{4}x$ procede como na 1ª solução.



3ª solução: Observamos que o triângulo *CJG* é retângulo. A semelhança de *CGJ* e *ABC* nos dá $\frac{CJ}{x}=\frac{15}{20}$, ou seja, $CJ=\frac{3}{4}x$. O teorema de Pitágoras diz que $CJ^2+JG^2=CG^2$, ou seja, $CG^2=\left(\frac{3}{4}x\right)^2+x^2$ e segue que $CG=\frac{5}{4}x$. Agora $CG=FG$ segue como na 1ª ou na 2ª soluções.



c) *1ª solução:* Temos $DF = GH - FG - DH = \frac{3}{4}(20-x) - \frac{5}{4}x - x = 15 - 3x$. Da semelhança dos triângulos ABC e DEF tiramos $\frac{DE}{20} = \frac{DF}{15} = \frac{15-3x}{15}$, donde $DE = \frac{4}{3}(15-3x)$. A área de DEF é então $A(x) = \frac{1}{2} DF \cdot DE = \frac{2}{3}(15-3x)^2$. A figura ao lado mostra o gráfico dessa função para $0 \le x \le 5$.

2ª solução: Temos $DF = GH - FG - DH = \frac{3}{4}(20-x) - \frac{5}{4}x - x = 15 - 3x$. A razão de semelhança entre os triângulos DEF e ABC como $\frac{DF}{AC} = \frac{15-3x}{15}$. Por outro lado, a área do triângulo ABC é $\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 15 = 150$; como a razão das áreas de triângulos semelhantes é o quadrado da razão de semelhança, segue que $A(x) = 150 \cdot \left(\frac{15-3x}{15}\right)^2 = \frac{2}{3}(15-3x)^2$, como antes.

Questão 5 – Solução

a) *1ª solução:* O princípio multiplicativo mostra que o número de maneiras de retirar duas bolas, uma a uma, é $10\times 9=90$. Dessas retiradas, há dez que determinam diâmetros, a saber, (1,6), (2,7), (3,8), (4,9), (5,10), (6,1), (7,2), (8,3), (9,4) e (10,5). Logo a probabilidade pedida é $\frac{10}{90}=\frac{1}{9}$.

2ª solução: Retira-se uma bola qualquer. Das nove possibilidades de retirar outra bola, apenas uma determinará, junto com a primeira, um diâmetro. Logo a probabilidade de retirar duas bolas que determinam um diâmetro é $\frac{1}{9}$.

3ª solução: É possível retirar duas bolas de $\binom{10}{2}=45$ maneiras diferentes. Dessas retiradas há cinco que determinam diâmetros; logo a probabilidade procurada é $\frac{5}{45}=\frac{1}{9}$.

b) *1ª solução:* O princípio multiplicativo mostra que o número de maneiras de retirar três bolas, uma a uma, é $10\times 9\times 8=720$. Para que uma retirada determine um triângulo retângulo, ela deve conter duas bolas *a* e *b* que determinam um diâmetro e uma terceira bola *x* distinta dessas duas; ordenando essas bolas das $3!=6$ maneiras possíveis, vemos que há seis retiradas que consistem dessas bolas. Como há cinco pares de bolas que determinam um diâmetro e a bola extra pode ser escolhida de oito maneiras diferentes, o número de retiradas que determinam um triângulo retângulo inscrito é $6\times 5\times 8=240$. Logo a probabilidade procurada é $\frac{240}{720}=\frac{1}{3}$.

*2ª solução (também mais adequada ao enunciado alternativo):*Uma vez retiradas três bolas, podemos formar com elas trêsgrupos de duas bolas. Observamos que se um desses grupos determina um diâmetro então isso não pode acontecer para os outros dois grupos. Como cada grupo de duas bolas tem probabilidade $\frac{1}{9}$ de determinar um diâmetro, a probabilidade procurada é então $\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$.

3ª solução: Há $\binom{10}{3} = 120$ maneiras de escolher três bolas, ou seja, há 120 triângulos inscritos com vértices nos vértices do decágono. Por outro lado, cada diâmetro determina oito triângulos retângulos inscritos, num total de $5 \times 8 = 40$; ou seja, há 40 escolhas de três bolas que determinam triângulos retângulos inscritos. A probabilidade procurada é então $\frac{40}{120} = \frac{1}{3}$.

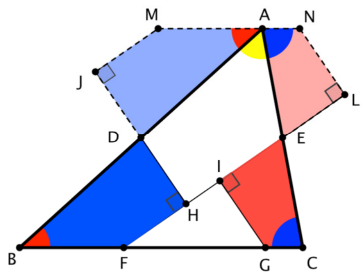
c) *1ª solução:* O número de retiradas de quatro bolas é $10 \times 9 \times 8 \times 7$ e cada uma dessas retiradas determina um quadrilátero inscrito. Por outro lado, as bolas de uma retirada que determina um retângulo inscrito devem determinar dois diâmetros. Há dez escolhas para a primeira bola de uma tal retirada e a bola diametralmente oposta pode então aparecer em qualquer uma das três posições seguintes; as outras duas bolas podem então ser escolhidas de oito maneiras diferentes, correspondentes aos quatro diâmetros ainda não determinados. Assim, as retiradas que determinam um triângulo retângulo são em número de $10 \times 3 \times 8$ e a probabilidade procurada é então $\frac{10 \times 3 \times 8}{10 \times 9 \times 8 \times 7} = \frac{1}{21}$

2ª solução: Para que as quatro bolas retiradas determinem um retângulo, as três primeiras devem determinar um triângulo retângulo, o que acontece com probabilidade $\frac{1}{3}$; uma vez isso feito, há uma única escolha para a quarta bola entre as sete remanescentes. Logo a probabilidade procurada é $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{21}$.

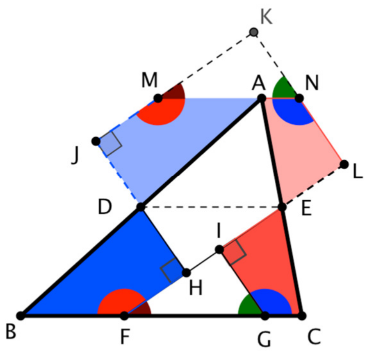
3ª solução: Há $\binom{10}{4} = 210$ maneiras de escolher quatro bolas, ou seja, há 210 quadriláteros inscritos com vértices nos vértices do decágono. Por outro lado, um retângulo inscrito é determinado por dois diâmetros, ou seja, há $\binom{5}{2} = 10$ retângulos inscritos, correspondentes a dez escolhas de quatro bolas. Logo a probabilidade procurada é $\frac{10}{210} = \frac{1}{21}$.

Questão 6 – Solução

a) *1ª solução:* Na figura ao lado marcamos, em vermelho, o ângulo em B do triângulo *ABC* e o ângulo correspondente no polígono *AMJD*; em azul, marcamos o ângulo em C do triângulo ABC e o ângulo correspondente do polígono *AELN*. Podemos observar na parte superior da figura que o ângulo $\widehat{MAN}$ é a soma desses dois ângulos com o ângulo em A do triângulo *ABC*; como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, segue que $\widehat{MAN} = 180^\circ$. Logo *M, A* e *N* estão alinhados.



2ª solução: Observamos primeiro que *AM* é paralelo a *BF*, pois ele é obtido de *BF* por meio de uma rotação de 180°; do mesmo modo, *AN* é paralelo a *CG*. Como *BF* e *CG* estão na mesma reta suporte e *AM* e *AN* tem o ponto A em comum, segue que os pontos *M*, *A* e *N* estão alinhados.

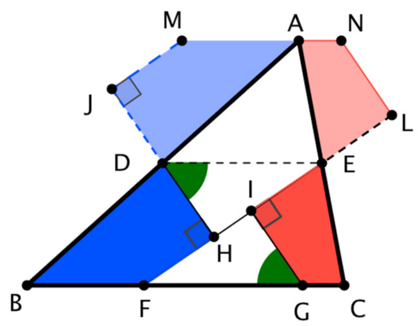


b) Na figura os ângulos marcados em vermelho são congruentes, assim como os ângulos marcados em azul. Segue que os ângulos marcados em marrom também são congruentes, pois são ambos suplementos do ângulo vermelho; do mesmo modo, os ângulos verdes são também congruentes. Notamos agora que

$$MN = MA + AN = BF + CG = BC - FG = 2FG = FG = FG$$

Segue pelo critério ALA que os triângulos FGI e MNK são congruentes.

c) Na figura ao lado traçamos a base média *DE* do triângulo *ABC.* O teorema da base média nos diz que *DE* é paralelo a *BC* e que $DE = \frac{1}{2}BC = FG$. Segue que os triângulos *FG*I e *EHD* são congruentes, pois são retângulos, tem os ângulos verdes congruentes (pois são agudos de lados paralelos) e hipotenusas congruentes. Em particular, temos $FI = EH$, donde $FH = FI - HI = EH - HI = EI$. Logo $LH = LE + EI + IH = FH + HI + IE = EF$.



d) A área do quadrado *HJKL* é igual à área do triângulo *ABC*, que é 9; logo o lado do quadrado mede 3. Em particular, $LH = 3$ e segue do item anterior que $EF = 3$.