OBMEP NA ESCOLA 2016 - Soluções

Q1 – Solução

item a)

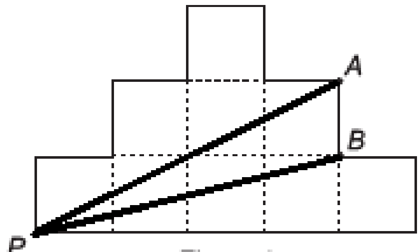


Figura 1

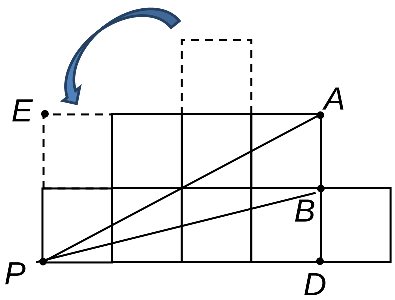
A área total do polígono da Figura 1 é 9. A região inferior à reta *PB* é um trapézio de área 3. Isso pode ser constatado utilizando a fórmula da área de um trapézio, mas também observando que o trapézio é formado por um quadrado de área 1 mais a metade de um retângulo de área 4. Sendo assim, sua área é, de fato, 2 + 1 = 3.

A região entre os segmentos *PA* e *PB* é um triângulo de área 2, pois a base *AB* mede 1 e a altura relativa a ela mede 4.

Consequentemente, a área da região superior à reta *PA* mede 9 – 2 – 3 = 4.

Outra solução:

Observamos que o quadrado isolado no topo pode ocupar a posição na camada abaixo para completar o retângulo de vértices *PDAE*, como na figura ao lado, e o segmento *PA* é uma diagonal desse retângulo. Portanto, a região acima do segmento *PA* na Figura 1 tem área igual à metade da área desse retângulo, ou seja, 4 unidades de área. A região triangular *PAB* tem área 2 (base 1 e altura 4) e o trapézio abaixo de *PB* tem, portanto, área igual a 9 – 4 – 2 = 3.

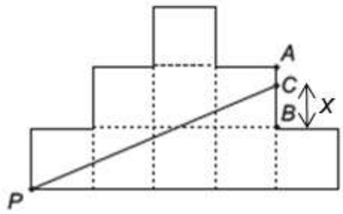


Item b)

A área da região abaixo do segmento *PC* deve ser $4{,}5$ e, em função da altura $\mathrm{x} = \mathrm{BC}$ essa área é dada por $\frac{4\,(1+\mathrm{x})}{2} + 1$(a área do triângulo retângulo mais a área de um quadrado). Daí, $2.(1+\mathrm{x}) = 3{,}5$ e $\mathrm{x} = 0{,}75$.

Outra solução:

Seja *x* a distância de *B* a *C*. Como o segmento *PC* divide o polígono original em duas regiões de mesma área, vamos calcular separadamente a área das duas regiões e compará-las, a fim de encontrar o valor de *x*.



A área da região acima de *PC* é $\frac{2+(1-x)}{2}.4 = 6-2x$. De fato, esta região tem a mesma área de um trapézio de bases 2 e (1- *x*) e altura 4 (basta transferir, como fizemos acima, o quadrado do topo para que o trapézio se complete). Por outro lado, a área da região abaixo de *PC* é a soma da área de um quadrado unitário com um triângulo de base 1 + *x* e altura 4, isto dá $1+\frac{(1+x).4}{2} = 3+2x$. Como as áreas devem ser iguais, $6-2x = 3+2x$ e, portanto, $x = \frac{3}{4} = 0{,}75$ unidades de comprimento.

Q2 – Solução

Item a)

Como $304 = 2^4 \times 19$, os divisores positivos de 304 são: 1, 2, 4, 8, 16, 19, 38, 76, 152 e 304. Assim, 304 é (12)-perfeito pois

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 19 + 38 + 76 + 152 + 304 = 620 = 2 \times 304 + 12.$$

Item b)

A decomposição em fatores primos de n nos dá $n = 6p = 2 \times 3 \times p$. Os divisores positivos de n são: 1, 2, 3, 6, p, 2p, 3p e 6p. Como

$$1 + 2 + 3 + 6 + p + 2p + 3p + 6p = 12 + 12p = 2 \times 6p + 12 = 2 \times n + 12,$$

então, $n = 6p$, $p > 3$ primo, é (12) - perfeito.

Item c)

A recíproca da afirmação feita no item b) é :

"Todo número (12) - perfeito é da forma $n = 6p$ para algum $p > 3$ primo."

Se quisermos mostrar que essa afirmação é falsa, basta encontrar um número (12) - perfeito que não é da forma $n = 6p$ com $p > 3$ primo. De fato, é este o caso.

Um número que serve como contraexemplo é 304. No item a) mostramos que 304 é (12) - perfeito. No entanto 304 não é múltiplo de 6 (lembre-se que $304 = 2^4 \times 19$).

Outro número que serve como contraexemplo é 24. Ele é (12) - perfeito, pois a soma dos divisores positivos de 24 é $1+2+3+4+6+8+12+24 = 60 = 2 \times 24 + 12$. Agora, 24 não é da forma $n = 6p$ com $p > 3$ primo. Note que, embora $24 = 6 \times 4$, 4 não é primo.

Assim, a recíproca da afirmação do item b) é falsa.

Q3 – Solução

Para responder às questões, vamos ampliar e completar a tabela do enunciado:

Paciente	Horário da chegada	Tempo de atendimento	Horário do início do atendimento	Horário do fim do atendimento	Tempo de espera	Médica que realizou o atendimento
1	20:00	44	20:00	20:44	0	Eva
2	20:15	20	20:15	20:35	0	Fabiana
3	20:20	16	20:35	20:51	15	Fabiana
4	21:30	40	21:30	22:10	0	Eva
5	21:50	20	21:50	22:10	0	Fabiana

Item a)

O tempo médio de atendimento foi de $\frac{0+0+15+0+0}{5} = 3$ minutos.

Item b)

A médica que atendeu o último paciente foi Fabiana. O próprio preenchimento da tabela acima já é uma justificativa para este fato.

Outra explicação é a seguinte: Fabiana atendeu os Pacientes 2 e 3, um após o outro, já que Eva estava atendendo o Paciente 1 até às 20h44min. Eva passou então a atender o Paciente 4, pois foi a primeira médica que ficou livre, já que Fabiana terminou o atendimento do Paciente 3 somente às 20h51min. Enquanto Eva atendia o Paciente 4, chegou o Paciente 5, que foi prontamente atendido por Fabiana, pois esta estava livre desde às 20h:51min.

Item c)

Passemos agora a analisar a função *f(t)*. Nos instantes em que as duas médicas estão em atendimento, a inclinação é de 1 para 2, isto é, a cada minuto de atendimento, o tempo acumulado cresce de 2 minutos. As duas médicas estavam em atendimento simultâneo das 20h:15 às 20h44min e das 21h50min às 22h10min, mas há intervalos de tempo em que só uma delas efetuou atendimento e outros intervalos em que nenhum atendimento foi realizado.

O gráfico de *f(t)* é formado apenas por segmentos de reta. Vejamos quais são seus principais pontos.

Das 20h00min às 20h15 min – somente a médica Eva realizou atendimento. Nesse intervalo, o tempo de atendimento acumulado é dado pela função $f(t) = t$. O valor dessa função no extremo direito $t = 15$ do intervalo é $f(15) = 15$.

Das 20h15min às 2044min – ambas realizaram atendimento. Nesse intervalo, o tempo de atendimento acumulado é dado pela função $f(t) = 2(t - 15) + 15$. O valor dessa função no extremo direito $t = 44$ do intervalo é $f(44) = 2.(44 - 15) + 15 = 73$.

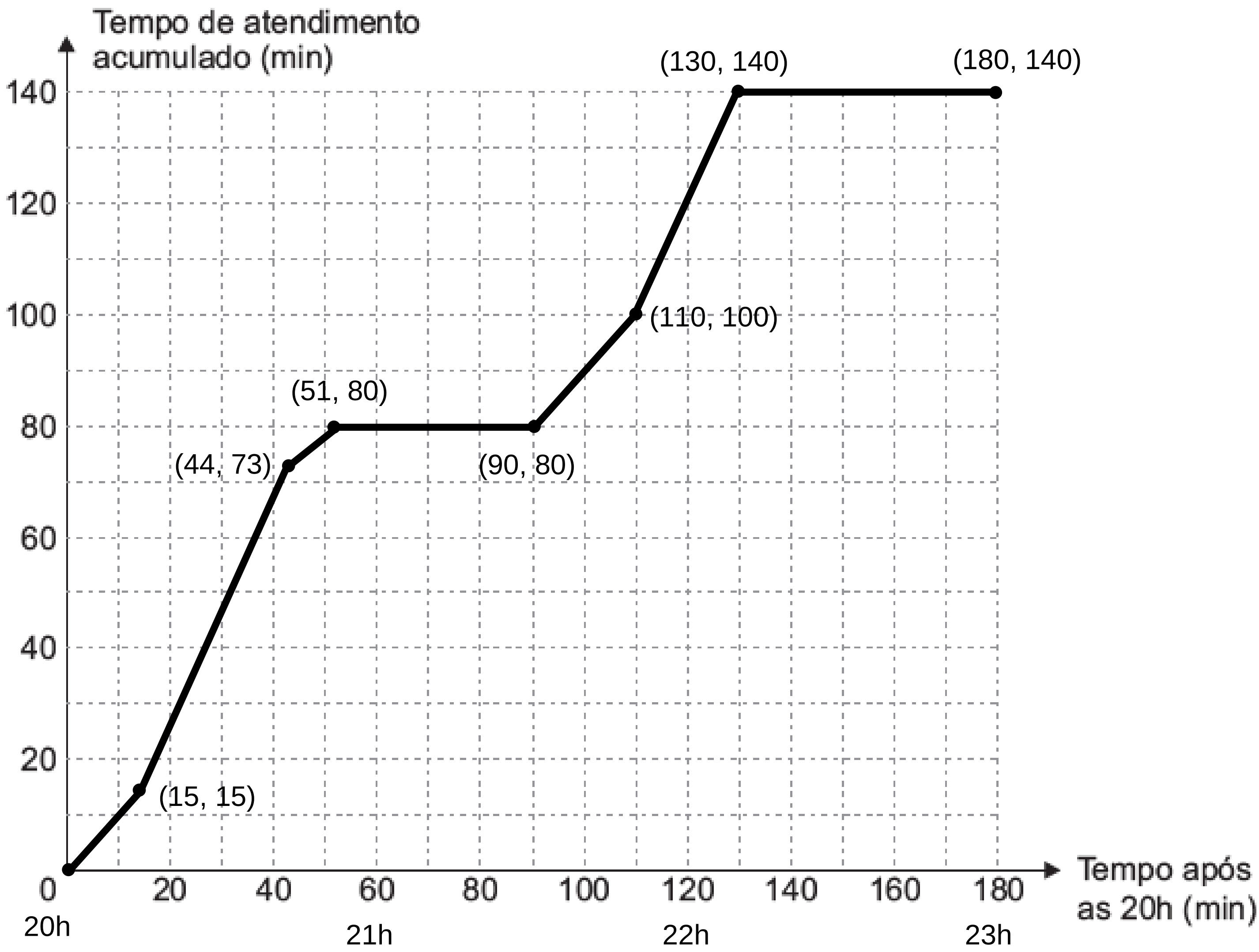
Das 20h44min até às 20h51min – somente Fabiana atendeu. Nesse intervalo, o tempo de atendimento acumulado é dado pela função $f(t) = (t - 44) + 73$. O valor dessa função no extremo direito $t = 51$ do intervalo é $f(51) = (51 - 44) + 73 = 80$.

Das 20h51min às 21h30min – nenhuma das médicas realizou atendimento e, portanto, nesse intervalo o valor da função que dá o tempo acumulado é constante: $f(t) = 80$, $51 \leq t \leq 90$.

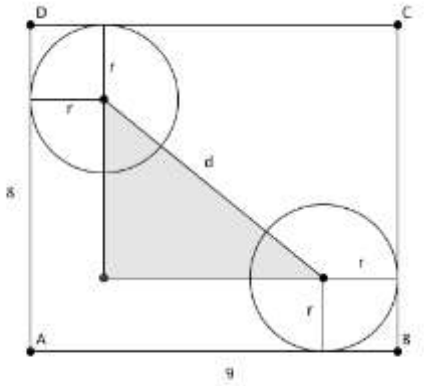
Das 21h30min às 21h50min, ou seja, entre o intervalo de 90 min até 110 min após às 20h, Eva passou a atender sozinha. Nesse intervalo de tempo, a função é dada por $f(t) - 80 = t - 90$ ou $f(t) = t - 10$. O valor dessa função no extremo direito $t = 110$ do intervalo é $f(110) = 100$.

Das 21h50min até às 22h10min, ou seja, no intervalo de 110 min até 130 min após às 20h, as duas médicas passaram a tender simultaneamente; a função que descreve o tempo acumulado é dada por $f(t) - 100 = 2(t - 110)$, ou $f(t) = 2t - 120$. O valor dessa função no extremo direito $t = 130$ é $f(130) = 140$.

Finalmente, das 22h10min até às 23h não houve atendimento e, nesse intervalo, a função que modela o tempo acumulado é constante: $f(t) = 140$, $130 \leq t \leq 180$.



Q4 – Solução



Item a)

O retângulo dado tem dimensões 8 e 9. Quando $r = 2$, a distância d entre os centros dos dois círculos é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 4 e 5 respectivamente. Segue do Teorema de Pitágoras que

$$d^2 = 4^2 + 5^2,$$

ou seja, $d = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$.

Obs. É possível obter a resposta por meio de coordenadas em que A=(0,0), B=(8,0), C=(8,9) e D=(0,9). Nesse caso, o centro da circunferência superior é (2,7) e o da inferior é (6,2).

Item b)

No caso geral, a distância d entre os centros dos círculos é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem $8 - 2r$ e $9 - 2r$ respectivamente. Portanto,

$$d^2 = (8 - 2r)^2 + (9 - 2r)^2 = 145 - 68r + 8r^2.$$

Logo, $d = \sqrt{145 - 68r + 8r^2}$.

Item c)

Os círculos tangenciam-se quando $d = 2r$, nesse caso r satisfaz a seguinte equação:

$$4r^2 = 145 - 68r + 8r^2,$$

ou ainda,

$$4r^2 - 68r + 145 = 0 \qquad (*)$$

Logo,

$$r = \frac{68 \pm \sqrt{68^2 - 16 \cdot 145}}{8} = \frac{68 \pm \sqrt{16 \cdot 289 - 16 \cdot 145}}{8}$$

$$r = \frac{68 \pm \sqrt{16 \cdot 144}}{8} = \frac{68 \pm 48}{8}$$

As soluções da equação (*) são $r = 2{,}5$ e $r = 74$; como os círculos são internos ao retângulo, a solução do problema é $r = 2{,}5$.

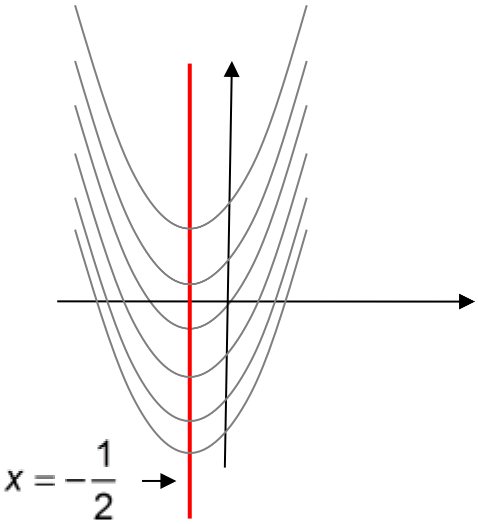
Q5 – Solução

Item a)

O vértice da parábola de equação $y = x^2 + x + c$ tem coordenadas

$$x_V = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad y_V = -\frac{1-4c}{4}$$

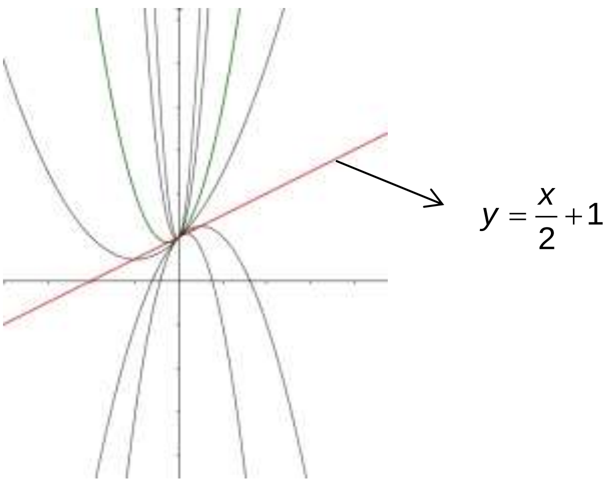
Logo, quando c percorre o conjunto dos números reais, apenas a ordenada y_V muda de valor, enquanto a abcissa x_V fica fixa. Portanto, todos os vértices das parábolas em questão pertencem à reta vertical de equação $x = -\frac{1}{2}$. Veja uma ilustração de tal fato:



Item b)

O vértice da parábola de equação $y = ax^2 + x + 1$ é o ponto $V = (\frac{-1}{2a}, -\frac{1-4a}{4a})$ e, usando $x = -\frac{1}{2a}$ como parâmetro real, vemos que $y = \frac{-1+4a}{4a} = \frac{-1}{4a} + 1 = \frac{1}{2}(\frac{-1}{2a}) + 1$, o que mostra que o ponto V pertence à reta de equação $y = \frac{x}{2} + 1$, qualquer que seja a, número real não nulo. Observe que quando a varia no conjunto dos números reais não nulos, x varia no conjunto de todos os números reais.

Veja uma ilustração de tal fato:



Item c)

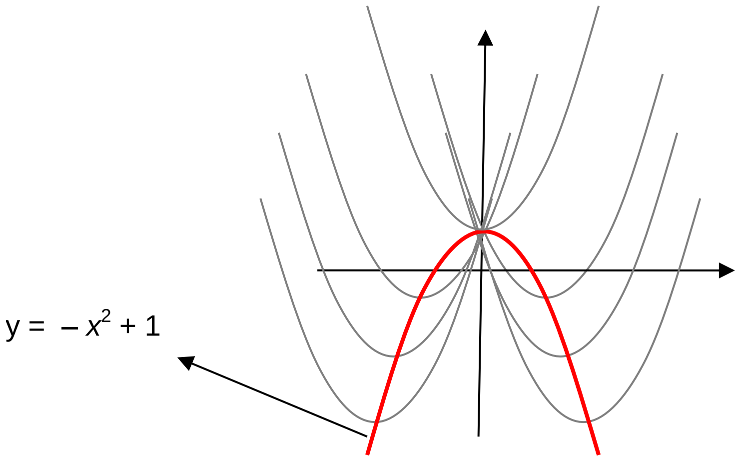
O vértice da parábola de equação $y = x^2 + bx + 1$ é o ponto $= \left(\frac{-b}{2}, -\frac{b^2-4}{4}\right)$, para qualquer número real b.

Se $x = \frac{-b}{2}$, então $b = -2x$. Substituindo b por essa expressão em $y = -\frac{b^2-4}{4}$, obtemos

$$y = -\frac{(-2x)^2 - 4}{4} = \frac{-4x^2+4}{4} = -x^2 + 1.$$

Ou seja, os vértices das parábolas de equação $y = x^2 + bx + 1$, quando b percorre o conjunto dos números reais, estão na parábola de equação $y = -x^2 + 1$.

Observe uma ilustração de tal fato:



Q6 – Solução

Item a)

O único número de dois algarismos que não é setespalhado é o 77. De 10 a 99 existem 90 números e, excluindo o 77, há 89 números setespalhados de dois algarismos.

Item b)

Dividimos em dois casos: quando o algarismo das unidades do número é 7 ou quando o algarismo das unidades não é 7.

No primeiro caso, já que o algarismo das unidades é 7, há 9 possibilidades para o algarismo das dezenas (só não pode ser 7) e 9 possibilidades para o algarismo das centenas, o que resulta em um total de 9 x 9 = 81 possibilidades de números setespalhados que terminam com 7.

No segundo caso, há 9 possibilidades para o algarismo das unidades e 89 possibilidades para centenas e dezenas (como visto no item anterior para dois algarismos). Assim há 89 x 9 = 801 números setespalhados com algarismo das unidades diferente de 7.

Juntando os dois casos, concluímos que existem 81 + 801 = 882 números que são setespalhados e possuem três algarismos.

Item c)

Se o algarismo das unidades não é 7, há 882 possibilidades para milhar, centena e dezena para que o número de quatro algarismos seja setespalhado (fato análogo ao que foi visto no item b)). Isso fornece 9 x 882 = 7938 números setespalhados que não terminam em 7.

Se o algarismo das unidades é 7, há 9 possibilidades para a casa das dezenas e 89 possibilidades para centena e milhar, o que resulta em 9 x 89 = 801 números que são setespalhados e terminam em 7.

Item d) Pelos exemplos anteriores, podemos inferir que $\mathrm{a_n} = 9\,\mathrm{a_{n-1}} + 9\mathrm{a_{n-2}}$. Veremos que de fato isso ocorre, levando em conta que o número pode ou não terminar com o algarismo 7.

Se o número não terminar em 7, ele será setespalhado se, e só se, o número obtido suprimindo-se o algarismo das unidades for setespalhado, isso contribui com o fator $9\,a_{n-1}$ na igualdade acima, pois há 9 possibilidades para o algarismo das unidades e a_{n-1} possibilidades para o número em que o algarismo das unidades foi suprimido.

Caso 7 apareça na casa das unidades, há 9 possibilidades para a casa das dezenas (todos os algarismos que não são 7) e o número obtido suprimindo-se dezena e unidade deve ser setespalhado. Isso contribui para o fator $9\,a_{n-2}$ na igualdade $a_n = 9\,a_{n-1} + 9\,a_{n-2}$.