



## Apresentação

---

### **Caros professores orientadores e alunos do Programa de Iniciação Científica – PIC da OBMEP**

Este é um número especial da Revista do Professor de Matemática – **RPM**, elaborado para utilização no PIC da OBMEP a ser realizado a partir do primeiro semestre de 2014.

A **RPM**, como seu nome diz, é uma revista dedicada aos professores de Matemática da educação básica, a alunos e professores de cursos de licenciatura em Matemática e a todos aqueles que se interessam pela Matemática do nível médio. O tratamento dado aos temas abordados procura ser acessível e agradável, sem sacrificar o rigor. A revista é uma publicação da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM e tem sido editada e distribuída sem interrupções desde 1982.

A revista publica crônicas, artigos e seções, como *Problemas*, *O leitor pergunta*, *Livros*, *Olhando mais de cima*, etc. Nos artigos, temas interessantes de nível elementar ou avançado são apresentados de modo acessível ao professor e ao aluno do ensino básico ou de cursos de Licenciatura em Matemática. Uma experiência interessante em sala de aula, um problema que suscita uma questão pouco conhecida, uma história que mereça ser contada ou até uma nova abordagem de um assunto conhecido. Nas seções, a revista “conversa” com o leitor, publicando problemas e/ou soluções propostas por eles, cartas, resenhas de livros, erros encontrados em textos didáticos, etc.

Para este exemplar especial, o Comitê Editorial da **RPM** escolheu artigos que pretendem ampliar o conhecimento dos alunos em diferentes tópicos, bem como temas que motivem discussões ou satisfaçam à curiosidade teórica e histórica de alunos interessados em Matemática. Além disso, publicamos várias propostas de atividades que podem ser aplicadas nas salas de alunos de ensino fundamental e médio. As atividades tentam despertar a curiosidade dos alunos para tópicos importantes da Matemática que são explicitados nas justificativas dos procedimentos propostos.

Apresentamos também uma seção *Problemas* com:

Problemas I: problemas interessantes com números primos.

Problemas II: uma seleção de problemas extraídos do PISA (Programme for International Student Assessment – Programa Internacional de Avaliação de Alunos).

Problemas III: vinte problemas selecionados entre os publicados na seção *Problemas* da **RPM**, que abrangem a maioria dos tópicos da educação básica.

As soluções dos problemas propostos estão no final deste fascículo.

Os artigos aqui publicados não apresentam as referências bibliográficas, citações ou agradecimentos que constam nos artigos originais da **RPM**.

Comitê Editorial da **RPM**



## Conteúdo

---

Atividades em sala de aula .....	05
Um jogo aritmético .....	12
Seis problemas não triviais equivalentes .....	16
O menino .....	22
O problema dos cinco discos: sorte ou sabedoria? .....	26
Calculadora padrão: um problema interessante .....	31
Uma equação interessante .....	37
Painéis	
Painel I	
O número 12 .....	41
Painel II	
Sexta-feira 13 .....	43
Painel III	
O jogo de bilhar .....	45
Painel IV	
Codificando e decifrando mensagens .....	47
Painel V	
Qual a relação entre os números 102.564 e 410.256? .....	49
Painel VI	
Uma demonstração visual para a fórmula do $\text{sen}(A + B)$ .....	51
Painel VII	
Valores irracionais de funções trigonométricas .....	52
Painel VIII	
Mágica com números .....	54
Painel IX	
Destreza ou esperteza? .....	56
Painel X	
Determinante para fatorar .....	58
Funções interessantes .....	60
A formiga inteligente .....	66
A demonstração feita por Heron .....	72

A Matemática da folha de papel A4 .....	75
Retângulo áureo, divisão áurea e sequência de Fibonacci .....	82
Usando Geometria para somar .....	95
Médias .....	100
Problemas diversos resolvidos com Geometria Analítica .....	112
A sombra do meu abajur .....	119
Ilha do tesouro. Dois problemas e duas soluções .....	125
Qual é mesmo a definição de polígono convexo? .....	129
A solução de Tartaglia para a equação do 3º grau e a emergência dos números complexos .....	135
Grandezas incomensuráveis e números irracionais .....	153
A outra face da moeda honesta .....	162
Número de regiões: um problema de contagem .....	165
Intuição e Probabilidade .....	170
Problemas I .....	172
Problemas II .....	175
Problemas III .....	181
Solução dos Problemas .....	185



## Atividades em sala de aula

Aprende-se Matemática “fazendo” Matemática. Apresentamos aqui dois grupos de atividades que permitem a alunos do ensino fundamental “fazer” Matemática. As folhas contendo as atividades foram copiadas de números da revista *The Mathematics Teacher*\* (O professor de Matemática).

No início da primeira atividade, alguns exemplos podem ser feitos coletivamente. Ao fim de cada atividade é interessante comparar os resultados obtidos pelos alunos reforçando o fato de que um mesmo problema pode ter várias soluções.

O primeiro grupo de atividades trabalha as operações aritméticas com números inteiros. O segundo grupo de atividades trabalha com visualização de figuras no espaço, permitindo aos alunos descobrir padrões e fazer conjecturas. As primeiras partes podem ser aplicadas em salas do ensino fundamental e a parte final no ensino médio, explorando generalizações e suas representações algébricas.

Na página 15 deste exemplar está uma solução de cada problema proposto no Primeiro grupo.

---

\* Publicação do *National Council of Teachers of Mathematics* – NCTM, Reston, Virginia, USA.



## Primeiro grupo: atividades I, II e III.

### I. Instruções

- Em cada linha há 5 números e um sexto número, chamado “total”.
- Coloque os sinais +, −, ×, ÷ e parêntesis, colchetes, chaves, de modo que o resultado das contas indicadas seja o “total”.
- Os 5 números devem ser usados, cada um deles uma só vez, em qualquer ordem.

**Exemplo:** 7, 8, 1, 9, 9 total: 16.

Uma solução:  $(9 \div 9) \times (7 + 8 + 1) = 16$ .

1. 1, 5, 3, 6, 10 total: 5 \_\_\_\_\_

2. 8, 11, 9, 1, 8 total: 2 \_\_\_\_\_

3. 11, 10, 15, 20, 3 total: 6 \_\_\_\_\_

4. 12, 18, 3, 11, 12 total: 8 \_\_\_\_\_

5. 4, 16, 10, 24, 25 total: 1 \_\_\_\_\_

6. 17, 14, 7, 17, 13 total: 7 \_\_\_\_\_

7. 2, 9, 5, 9, 4 total: 22 \_\_\_\_\_

8. 3, 6, 10, 5, 7 total: 2 \_\_\_\_\_

9. 8, 6, 11, 5, 21 total: 7 \_\_\_\_\_

10. 6, 1, 2, 2, 17 total: 8 \_\_\_\_\_



## II. Instruções

- Trabalhe com os números 11, 14, 3, 19 e 9.
- Coloque os sinais +, -, ×, ÷ e parêntesis, colchetes, chaves, para obter todos os números de 1 até 11.
- Os números 11, 14, 3, 19 e 9 devem ser usados, cada um deles uma só vez, em qualquer ordem.

1.  $(11 + 14 - 19 + 3) \div 9 = 1$

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

4. \_\_\_\_\_

5. \_\_\_\_\_

6.  $11 - [(19 + 9) \div 14 + 3] = 6$

7. \_\_\_\_\_

8. \_\_\_\_\_

9. \_\_\_\_\_

10. \_\_\_\_\_

11.  $[9 - (19 - 14) - 3] \times 11 = 11$



### III. Instruções

- Trabalhe com os números 2, 3, 5, 7 e 11. (Observe que são os cinco primeiros números primos.)
- Coloque os sinais +, -, ×, ÷ e parêntesis, colchetes, chaves, para obter os números pedidos nos itens de 1 a 10 abaixo.
- Os números 2, 3, 5, 7 e 11 devem ser usados, cada um deles uma só vez, em qualquer ordem.

1. Escreva (seguindo as instruções) o menor primo ímpar.

$$3 = [(2 \times 5) + (7 - 3)] - 11$$

2. Escreva o menor número natural ímpar.

3. Escreva o menor número natural primo.

4. Escreva o menor número natural composto.

5. Qual é o maior número natural composto que você consegue escrever?

6. Qual é o maior número natural ímpar que você consegue escrever?

7. Escreva o menor número natural que você consegue achar, usando uma só vez cada uma das operações.

8. Determine e escreva o maior número natural par possível, usando uma só vez cada uma das operações.

9. Escreva um número natural usando apenas subtrações.

10. Determine e escreva o maior número primo possível obedecendo às instruções.



## Segundo grupo – Descobertas com cubos: atividades I, II, III e IV

### Descrição

Um cubo grande, decomposto em cubos pequenos, é mergulhado numa lata com tinta. Pergunta-se quantas faces dos cubos pequenos ficarão pintadas.

### Objetivos

Estudantes visualizarão figuras no espaço, construirão uma tabela, descobrirão padrões na tabela e, usando esses padrões, farão conjecturas.

### Diretrizes

Distribuir para cada aluno folhas com as atividades ou colocá-las no quadro-negro. Sugere-se dividir a classe em grupos de dois alunos, deixando-os trabalhar juntos.

Após completar a atividade I, os estudantes devem registrar seus resultados na tabela (atividade III). Certifique-se de que todos os estudantes têm os valores corretos, pois conjecturas serão feitas a partir dos dados da tabela. Poucos estudantes conseguirão completar a tabela para um cubo  $10 \times 10 \times 10$ , a menos que algum padrão tenha sido identificado (atividade IV). Pergunte: “Existem constantes em uma coluna? Existem múltiplos?”. Sugerir aos alunos que procurem fatores comuns vai ajudá-los a reconhecer padrões. Por exemplo, 0, 6, 24, 54 e 96 são as 5 primeiras entradas em uma das colunas. Um padrão torna-se mais visível se esses números forem escritos como  $0$ ,  $6 \times 1$ ,  $6 \times 4$ ,  $6 \times 9$  e  $6 \times 16$ .

I. Responda às perguntas a seguir para cada um dos cubos das figuras 1, 2, 3 e 4.

a) Quantos cubos pequenos há no cubo grande?

Se esse cubo maior for jogado numa lata de tinta e totalmente submerso:

b) Quantos cubos pequenos terão 3 faces pintadas?

c) Quantos cubos pequenos terão 2 faces pintadas?

d) Quantos cubos pequenos terão 1 face pintada?

e) Quantos cubos pequenos terão 0 face pintada?



f) Qual é a soma de suas respostas em b), c), d) e e)?

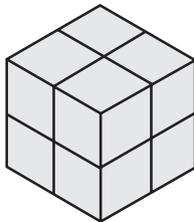


figura 1

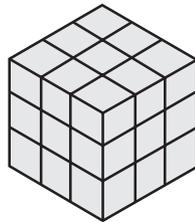


figura 2

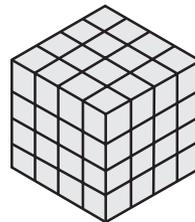


figura 3

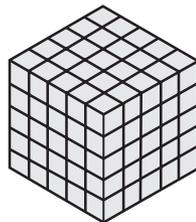


figura 4

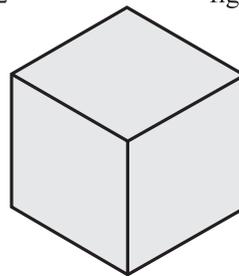


figura 5

II. Complete a figura 5, desenhando um cubo  $6 \times 6 \times 6$ . Responda novamente às perguntas a), b), c), d), e), e f).

III. Agora registre as informações na tabela abaixo. Considerando, em cada caso, o lado dos cubos pequenos como unidade.

Comprimento do lado do cubo maior	número de cubos pequenos com faces pintadas					número total de cubos pequenos
	0	1	2	3	4	
2						
3						
4						
5						
6						



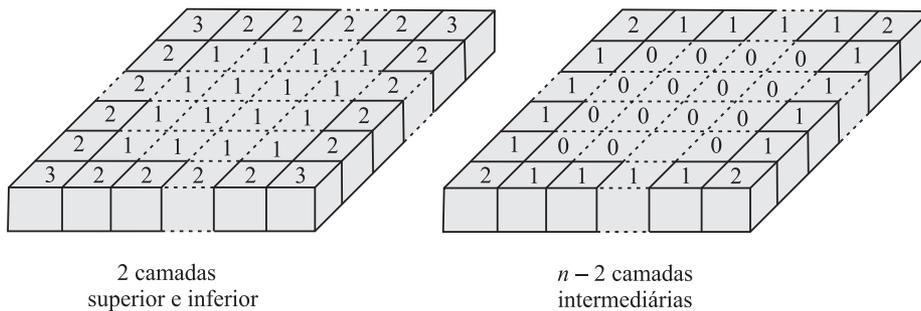
IV. Você observa padrões na tabela? Em caso afirmativo, complete a tabela para um cubo  $7 \times 7 \times 7$ . Em caso negativo, desenhe o cubo e então complete a tabela.

Você realmente pegou o jeito? Se você acha que sim, complete a tabela para um cubo  $10 \times 10 \times 10$ .

Eis uma questão que pode ser usada para culminar essa atividade:  
*Seja  $n$  o comprimento de um lado do cubo. Quando você completar na tabela a linha correspondente a  $n$ , a soma dos valores dessa linha será  $n^3$ ?*

#### Nota do tradutor

Para completar a tabela para um cubo de lado  $n$ , pode-se considerar o cubo grande como sendo formado por  $n$  camadas horizontais. Cada camada é um quadrado  $n \times n$ . Nos esboços abaixo, o número em cada cubo pequeno indica quantas de suas faces ficam pintadas após a imersão do cubo na lata de tinta:



<i>faces pintadas</i>	0	1	2	3
camadas sup. e inf.		$2(n - 2)^2$	$8(n - 2)$	8
camadas intermediárias	$(n - 2)^3$	$4(n - 2)^2$	$4(n - 2)$	
total	$(n - 2)^3$	$6(n - 2)^2$	$12(n - 2)$	8

Adaptado do artigo  
*Atividades em sala de aula*  
 Renate Watanabe, RPM 61



## Um jogo aritmético

### Introdução

Como seria bom se pudéssemos fazer da Matemática uma fonte de prazer ainda maior do que ela já é. Isso é possível se tivermos como aliado um poderoso recurso lúdico: o jogo. Proponho aqui um *jogo aritmético*, que é muito fácil de aprender, e pode ser jogado por duas ou mais pessoas. A idéia é sortear um número que, em seguida, deve ser obtido de outros, através das quatro operações. Para representar os inteiros usamos as cartas de um baralho comum, com exceção dos coringas. O ás (*A*), o valete (*J*), a dama (*Q*) e o rei (*K*) representam os números 1, 11, 12 e 13 respectivamente.

### Formando números

Estamos acostumados ao cálculo de expressões aritméticas, isto é, dada uma expressão envolvendo números e operações matemáticas, encontrar o número que lhe corresponde. Aqui se pede a solução do problema recíproco: dado um número, encontrar uma expressão aritmética que corresponde a esse número. No jogo só é permitido o uso das 4 operações aritméticas básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) e de parênteses. Por exemplo, com os números 2, 5, 7, 8 e 11, alguns dos números que podemos formar são:



$$\begin{aligned}19 &= 11 + 8 \\33 &= (5 - 2) \times 11 \\64 &= (8 \div 2) \times (5 + 11) \\81 &= 2 \times 5 \times 7 + 11 \\80 &= ((5 - 2) \times 7 - 11) \times 8 \\100 &= (7 + 2 + 11) \times 5\end{aligned}$$

Note que:

1. Não é necessário usar todos os inteiros disponíveis;
2. O uso de parênteses não tem restrições. Podemos também usar “parênteses encaixados” como na expressão do número 80;
3. Só podemos usar cada inteiro disponível uma única vez;
4. Não se pode formar números por justaposição, isto é, com o 5 e o 2 não podemos formar nem o 25 nem o 52.

Na prática, não precisamos escrever a expressão usando parênteses. Para formar o 80, declaramos: 5 menos 2 é 3; 3 vezes 7 é 21; 21 menos 11 é 10; 10 vezes 8 é 80. Para formar o 64, declaramos: 8 dividido por 2 é 4; 5 mais 11 é 16; 4 vezes 16 é 64.

### O que é necessário

1. Um baralho (descartam-se os coringas);
2. Cada jogador pode, se julgar necessário, ter caneta ou lápis e uma ou mais folhas de papel.

### Início do jogo

Colocamos o baralho na mesa, com as cartas voltadas para baixo, num monte, de modo que não se possa ver que números representam. Escolhe-se de comum acordo um participante para iniciar a rodada. Então os itens 1, 2 e 3 a seguir devem ser repetidos até que haja um vencedor.

### O jogo

1. Escolhemos a carta de cima do monte e multiplicamos seu valor por 13: em seguida, somamos o resultado do produto ao valor de uma segunda carta retirada de cima do monte. Obteremos um número entre 14 a 182 ( $13 \times 1 + 1 = 14$  e  $13 \times 13 + 13 = 182$ ). Esse é o número que deve ser formado na rodada. As duas cartas tiradas vão para baixo do monte;



2. O jogador da vez retira uma carta de cima do monte e a põe com o número para cima, no centro da mesa, ou ao lado da última carta retirada;
3. Ele então faz suas anotações e cálculos, e terá duas opções:
  - a) Formar o número sorteado ganhando a rodada (1 ponto). Nesse caso, o jogador da vez passa a ser aquele que está à sua esquerda e colocam-se as cartas retiradas debaixo do monte. A partir daqui, precisa-se sortear um novo número, portanto retorna-se ao item 1 para o início de outra rodada;
  - b) Passar a vez ao jogador da sua esquerda. Em seguida dá-se prosseguimento à rodada retornando-se ao item 2.

Quem vencer um total de 3 rodadas primeiro vence o jogo. Enquanto isso não ocorrer, repetem-se os itens 1, 2 e 3 sucessivamente.

### Um exemplo

O primeiro jogador, *A*, tira a carta de cima do monte, digamos, 5 e a carta seguinte, uma dama. Então, o número a ser formado na rodada será  $13 \times 5 + 12 = 77$ . As duas cartas tiradas vão para baixo do monte. O segundo jogador, *B*, tira a carta de cima do monte, digamos 8 e a coloca aberta na mesa. Não dá para formar 77 com o número 8. Ele passa a vez para *A* (se o jogo só tiver dois jogadores), que tira, digamos, 6. Com 8 e 6 e as quatro operações ainda não dá para obter 77. O 6 fica aberto na mesa e *A* passa a vez para *B* que tira, digamos, um valete. Com 6, 8 e 11 não dá para obter 77. É a vez de *A* que tira, digamos, 3.

Aí dois casos podem ocorrer:

- (1) *A* percebe que  $6 \times 11 + 8 + 3 = 77$ . Então a rodada termina, *A* ganha 1 ponto, as cartas vão para baixo do monte e tudo começa de novo com *B* tirando as duas cartas de cima do monte para obter um novo número.
- (2) *A* não percebeu que podia obter 77 com as cartas da mesa e passa a vez para *B*. Se *B* obtiver o 77, é ele que ganha um ponto e uma nova rodada se inicia. Se *B* não obtiver o 77, ele tira mais uma carta do monte e assim, sucessivamente, até que um dos jogadores conseguir formar o 77 com as cartas que estão abertas na mesa.



## Conclusão

Tenho jogado com amigos já há algum tempo. Estou convencido de que esse é um jogo intelectualmente estimulante e muito agradável. É claro que existem muitos jogos com essas qualidades, mas esse tem a vantagem de ser matematicamente educativo. Além disso, é uma forma de *viver a Matemática*, interagir com ela, senti-la, tocá-la. Também estou certo de que podemos criar jogos matemáticos que trabalhem a compreensão de teoremas e suas demonstrações, bem como suas aplicações na resolução de problemas..., mas esse já é um outro assunto...

Adaptado do artigo

*Um jogo aritmético*

Eric Campos Bastos Guedes, **RPM** 55.

---

### Respostas das **Atividades** – Primeiro grupo

#### I

- $10 - (6 + 3 + 1) + 5$
- $11 + 1 - 9 - (8 \div 8)$
- $11 - [(20 - 15) \times 3 - 10]$
- $(11 + 3) - 12 + 18 - 12$
- $(4 + 16) \div 10 - (25 - 24)$
- $17 - 17 + (14 - 13) \times 7$
- $(9 - 9) + (5 \times 4) + 2$
- $(7 - 6) + [3 - (10 \div 5)]$
- $5 - [(11 + 21) \div 8] + 6$
- $(17 - 1) \div [(6 - 2) \div 2]$

#### II

- $9 - \{14 \div [(19 + 3) \div 11]\}$
- $\{11 - [(19 + 9) \div 14]\} \div 3$
- $19 - 9 + 11 - 14 - 3$
- $9 - \{14 - [(11 + 19) \div 3]\}$
- $14 \div \{[(3 + 19) - 9] - 11\}$
- $9 - [(11 \times 3) \div (14 + 19)]$
- $11 \times 3 - (14 + 19) + 9$
- $19 - 9 + 11 - 14 + 3$

#### III

- $1 = 5 - [(11 + 3) \div 7 + 2]$
- $2 = [(5 + 3) - (11 - 7)] \div 2$
- $4 = [(5 + 3) \div (11 - 7)] \times 2$
- $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2310$
- $11 \times 7 \times 5 \times (3 + 2) = 1925$
- $0 = [(11 + 3) - 2 \times 7] \div 5$
- $[(11 - 3) \times (5 + 7)] \div 2 = 48$
- $5 - \{3 - [(11 - 2) - 7]\} = 4$
- $11 \times 7 \times 5 \times 3 - 2 = 1153$



## Seis problemas não triviais equivalentes

O poder da Matemática de relacionar o que aparentemente não tem relação.

Neste artigo dois problemas serão chamados *equivalentes* se sua resolução fizer uso do mesmo tipo de Matemática.

Problemas equivalentes evidenciam talvez a qualidade mais importante da Matemática: a possibilidade de um conceito teórico ser usado como modelo para muitas idéias diferentes. É fácil produzir exemplos.

Se o conceito teórico for “combinações”, como em Probabilidade, essa ideia também pode ser usada para determinar as leis de Mendel em Biologia, para calcular coeficientes binomiais, para calcular certas probabilidades em jogos de baralho, para achar o número de polígonos de vários tipos que tenham pontos arbitrários, como vértices, e assim por diante, quase que indefinidamente.

Mas é difícil produzir bons exemplos quando se desejam problemas equivalentes em uma escala muito menor, onde mesmo tipo de Matemática não significa Matemática de um mesmo campo, ou de um mesmo tópico dentro de um campo ou assunto que usem as mesmas ideias. Especificamente tentei encontrar problemas satisfazendo as seguintes condições:

- 1) Os problemas deveriam ser matematicamente idênticos até nos números usados na sua resolução.



- 2) Até que uma resolução fosse examinada, nada no problema deveria indicar que o mesmo tipo de Matemática pudesse ser usado. Assim os problemas deveriam, na medida do possível, vir de tópicos totalmente desvinculados dentro da Matemática ou dentro de aplicações da Matemática.
- 3) Os problemas deveriam estar no âmbito da Matemática do ensino fundamental ou ensino médio, quanto mais simples, melhor.

### Problemas

1. Expresse  $\frac{1}{2}$  como soma de duas frações de numerador 1 (frações do tipo  $\frac{1}{n}$ ,  $n$  um inteiro positivo).
2. Ache todos os retângulos cujos lados tenham por medida números inteiros e que tenham área e perímetro numericamente iguais.
3. Quais pares de inteiros positivos têm média harmônica igual a 4?
4. Ache os possíveis pares de inteiros cujo produto seja positivo e igual ao dobro de sua soma.
5. Dado um ponto  $P$ , ache todos os  $n$  tais que o espaço em torno de  $P$  possa ser coberto, sem superposição, por polígonos regulares, congruentes, de  $n$  lados.
6. Para quais inteiros positivos  $n > 2$ , o número  $2n$  é divisível por  $n - 2$ ?

Para mostrar a equivalência, verificaremos que os seis problemas se reduzem à resolução de uma equação que é a caracterização do primeiro.

### Redução dos problemas a uma equação

#### Problema 1

Se  $\frac{1}{2}$  for a soma de duas frações de numerador 1 então  $\frac{1}{2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ ,

onde  $p$  e  $q$  são inteiros positivos. (A equação será resolvida mais adiante.)



### Problema 2

Sejam  $a$  e  $b$  o comprimento e a largura do retângulo procurado. Como a área e o perímetro são numericamente iguais, temos:

$$2a + 2b = ab$$

$$2(a + b) = ab$$

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}.$$

Como  $a$  e  $b$  devem ser inteiros e positivos essa última equação tem a mesma forma que a equação do Problema 1.

### Problema 3

A média harmônica de dois números  $x$  e  $y$  é  $\frac{2xy}{x+y}$ .

Sejam  $x$  e  $y$  inteiros positivos. Das condições dadas:

$$\frac{2xy}{x+y} = 4$$

$$\frac{xy}{x+y} = 2$$

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{2}.$$

A última equação tem a mesma forma que a equação na 3ª linha do Problema 2 e assim se reduz à equação do Problema 1.

### Problema 4

Sejam  $x$  e  $y$  dois inteiros,  $z$  o seu produto,  $z > 0$ . Os números  $x$  e  $y$  devem ser positivos pois a sua soma e produto são positivos. Das

condições dadas obtém-se  $xy = z$  e  $x + y = \frac{z}{2}$ . As condições juntas

implicam:  $x + y = \frac{xy}{2} \Rightarrow \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{2}$ .

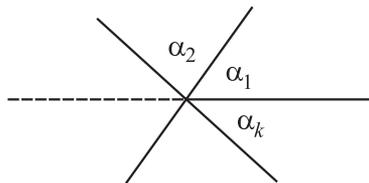


Essa última equação é idêntica à equação da última linha do Problema 3 e assim reduz-se à equação do Problema 1.

### Problema 5

Este é o problema mais difícil de caracterizar. Seja  $k$  o número de polígonos com vértice em  $P$ . Se os polígonos não se sobrepuserem, forem regulares e congruentes, utilizando a notação da figura abaixo,

obter-se-á:  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = \frac{360}{k}$  em graus.



Mas os  $\alpha_i$  são medidas de ângulos de polígonos regulares de  $n$  lados, portanto

$$\alpha_i = \frac{(n-2)180}{n} \quad 1 \leq i \leq k.$$

Temos então:

$$\begin{aligned} \frac{360}{k} &= \frac{(n-2)180}{n} \\ \frac{2}{k} &= \frac{(n-2)}{n} \\ 2n &= (n-2)k \\ 2n + 2k &= nk. \end{aligned}$$

Das condições do problema segue-se que  $n$  e  $k$  devem ser inteiros positivos e portanto essa equação tem a mesma forma que a da primeira linha do Problema 2.

### Problema 6

Se  $2n$  é divisível por  $n-2$  então  $2n = (n-2)k$ , onde  $k$  é um número inteiro. Essa equação é idêntica a uma das equações do Problema 5 e portanto se reduz à do Problema 1.



### Equação diofantina

Assim, os seis problemas podem ser resolvidos considerando-se a equação do Problema 1. Devido às condições, essa equação é uma equação diofantina e sua solução é interessante.

1. Seja  $\frac{1}{2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$  onde  $p$  e  $q$  são inteiros positivos.

2. É impossível termos  $\frac{1}{4} > \frac{1}{p}$  e  $\frac{1}{4} > \frac{1}{q}$  (pois a soma não chegaria a

ser  $\frac{1}{2}$ ) e assim pelo menos uma das frações  $\frac{1}{p}$  ou  $\frac{1}{q}$  deve ser maior

do que ou igual a  $\frac{1}{4}$ . Suponham os  $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{4}$ .

3. Então  $p = 1, 2, 3$  ou  $4$ .

4.  $p = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{q} \Rightarrow q = -2$  o que não é possível pois  $q$  é posi-

tivo;  $p = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{q} \Rightarrow \frac{1}{q} = 0$ , que não tem solução;

$$p = 3 \Rightarrow q = 6;$$

$$p = 4 \Rightarrow q = 4.$$

5. Por causa da simetria de  $p$  e  $q$  na equação original, obtemos resultados

correspondentes se  $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{4}$ .

6. Portanto temos 3 soluções:

$$(p, q) = (3, 6); (p, q) = (4, 4); (p, q) = (6, 3).$$

### Soluções

Todos os problemas estão agora resolvidos.

**Problema 1** – A resposta é  $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$ .

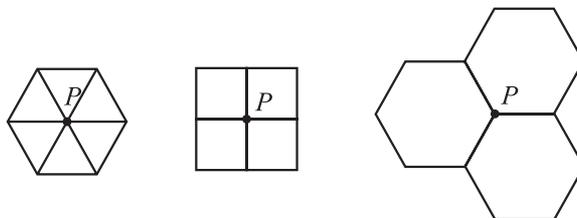


**Problema 2** – Existem dois retângulos satisfazendo as condições dadas: um é  $4 \times 4$  e o outro,  $3 \times 6$ .

**Problema 3** – Duas respostas: 4 e 4 ou 3 e 6 são pares de inteiros cuja média harmônica é 4.

**Problema 4** – Os pares são idênticos ao do problema 3.

**Problema 5** – Os únicos polígonos regulares congruentes que, sem superposição, cobrem o espaço em torno de  $P$  (e assim cobrem o plano) são os polígonos de 3 lados (seis triângulos equiláteros em torno de  $P$ ), os de 4 lados (quatro quadrados em torno de  $P$ ) e os de 6 lados (três hexágonos regulares em torno de  $P$ ), como se vê na figura.



Seis triângulos, quatro quadrados, três hexágonos.

**Problema 6** – A resposta é:  $n - 2$  é um divisor de  $2n$  quando  $n = 3$ ,  $n = 4$  ou  $n = 6$ . (A condição  $n > 2$  no problema original garante ser  $n - 2$  positivo. Sem essa condição existiriam as soluções  $n = 1$ ,  $n = 0$  ou  $n = -2$ ).

### Resumo

Os seis problemas formam um grupo de problemas, não triviais equivalentes que podem ser usados em classes de ensino fundamental e médio. É fácil desenvolver outros grupos de problemas mais apropriados para o uso em Álgebra Elementar ou Geometria. Tais grupos de problemas podem ser usados para demonstrar o poder de um pouco de Matemática abstrata na resolução de exercícios que, à primeira vista, pareciam não relacionados.

Adaptado do artigo

*Seis problemas não triviais equivalentes*

Zalman Usiskin, **RPM 04**.



## O menino

Não havia saída. Teria que esperar por três horas o próximo vô para Salvador. Arquiteto por formação e profissão, tinha que apresentar um projeto na manhã seguinte, numa cidade próxima à capital da Bahia. Assentei-me como pude. Teria que olhar para aquele relógio pendurado no teto por três horas. Como se não bastasse, o relógio registrava os segundos. Relógios que registram segundos demoram mais que os que não o fazem.

Alguns apelam para palavras cruzadas, outros giram os polegares e eu, como o vício do cachimbo entorta a boca, traço em folhas de papel as formas que se me apresentam no ambiente que é alcançado pelas retinas. Lápis e papel na mão, registrava dois lances de escada e uma escada rolante que surgiram a minha frente. Mal traçara as primeiras linhas, deparei-me com uma questão que me intrigou: quantos degraus deveria desenhar na escada rolante? Em vão, tentei contar os degraus visíveis. Se a escada parasse, poderia contá-los. Tive ímpetos de apertar o botão vermelho próximo ao corrimão, onde se lia “PARAR”. Meu censor não permitiu que o fizesse. Fiquei ali, inerte, com o cachimbo na mão e sem poder fumar.



Um menino sentou-se ao meu lado, brincando com uma bola. Sem tirar os olhos da bola, ela disse em voz clara e pausada:

– Pepino não parece “inreal”?

Olhei-o, ligeiramente, com o canto dos olhos e, sem nada dizer, retornei ao meu cachimbo apagado. Alguns instantes depois, senti minha camisa ser puxada e escutei novamente:

– Pepino não parece “inreal”?

Dessa vez, com uma mão segurando a bola e com a outra puxando a minha camisa, ele me olhava firmemente.

– Não é “inreal”, é irreal.

– Pois é, não parece?

Aquela insistência irritou-me. Eu, diante do mais intrincado problema da existência humana – quantos degraus ficam visíveis quando a escada rolante pára – e aquele menino me questionando sobre a realidade de um pepino! Tentando dissuadi-lo, resolvi apresentar-lhe a complexidade do problema que me afligia.

– Olha, menino, estou tentando desenhar aquelas escadas e não sei como acabar o desenho da escada rolante. Quantos degraus devo desenhar? Meu desenho está parado e a escada está subindo. Se a escada parasse de repente, quantos degraus ficariam visíveis?

Sem nada dizer, colocou a bola sobre a cadeira, subiu e desceu a escada (que sobe). Apontando para o relógio, disse:

– Eu desço a escada duas vezes mais rápido do que subo.

E repetiu sua viagem ao vão da escada, mostrando-me que, no mesmo tempo em que dava um passo para subir, dava dois para descer. Novamente sem nada dizer, começou a subir a escada rolante, contando os passos: um, dois, três, ..., num total de vinte passos. Do alto da escada, olhou-me como quem estivesse fazendo a mais óbvia das coisas, e começou a descer a mesma escada rolante, contando os passos: um, dois, três, ..., num total de trinta e cinco passos.

Em seguida tomou o lápis e o papel de minhas mãos e completou, com traços infantis, o meu desenho.



Nenhum censorador poderia me conter. Levantei-me bruscamente e apertei o botão vermelho. Ansioso, comecei a contar os degraus. Para meu espanto, correspondia ao desenho do menino. Com a maior seriedade que já tive em minha vida voltei-me para o menino e perguntei-lhe:

– Por que o pepino parece “inreal”?

### Quantos degraus o menino desenhou?

#### Vamos à resposta:

Vamos tomar como unidade de tempo o tempo no qual o menino dá um passo subindo a escada. Seja  $n$  o número de degraus da escada rolante que desaparecem (ou surgem) na unidade de tempo. Como o menino deu 20 passos para chegar ao topo da escada, ele demorou 20 unidades de tempo.

Isso significa que desapareceram  $20n$  degraus. Chamando de  $N$  o número de degraus visíveis, temos:

$$N = 20 + 20n \quad \text{ou} \quad n = \frac{N - 20}{20}. \quad (1)$$

O menino deu 35 passos para descer a escada rolante (que sobe). Lembremos que a frequência de seus passos é duas vezes maior na descida que na subida. Ou seja, o tempo de dar dois passos descendo é igual ao de um passo subindo. Cada passo na descida demora  $\frac{1}{2}$  da unidade de tempo.

Ele demorou  $\frac{35}{2}$  unidades de tempo para descer a escada. Isso

significa que surgiram  $\frac{35n}{2}$  degraus novos. Assim,

$$N = 35 - \frac{35n}{2} \quad \text{ou} \quad n = \frac{70 - 2N}{35}. \quad (2)$$

Igualando (1) e (2):

$$\frac{N - 20}{20} = \frac{70 - 2N}{35}$$



$$35N - 700 = 1400 - 40N$$

ou

$$75N = 2100, \text{ de onde}$$

$$N = \frac{2100}{75} = 28$$

O menino desenhou 28 degraus.

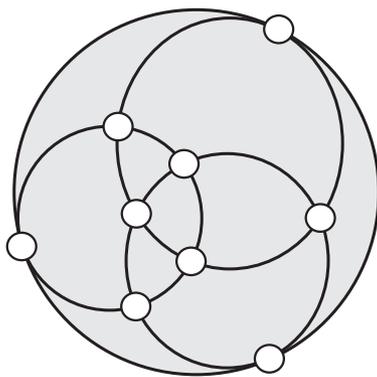
Adaptado do artigo

*O menino*

Ledo Vaccaro Machado, **RPM** 42.

## Desafio

Distribuir os números de 1 a 9 dentro dos pontos brancos (de intersecção), sem repetir, de forma que a soma dos números pertencentes à circunferência externa seja exatamente igual à soma dos números pertencentes a cada uma das circunferências internas.



Resposta na página 171.



## O problema dos cinco discos: sorte ou sabedoria?

Neste artigo queremos mostrar uma curiosidade sobre o antigo problema dos cinco discos. A mais bela apresentação desse problema encontra-se em *O homem que calculava* (Tahan, Malba – 32ª edição. Record, Rio de Janeiro, 1986). Nele é contada uma lenda onde três príncipes muito sábios e conhecedores da Matemática que pretendiam casar-se com a princesa Dahizé, filha do rei Cassim.

A prova dos cinco discos foi proposta por um grande sábio da corte para decidir qual dos três pretendentes era o mais inteligente.

*Foram mostrados aos príncipes cinco discos, sendo dois pretos e três brancos, todos de mesmo peso e tamanho. Em seguida vendaram-lhe os olhos e, ao acaso, foi pendurado um desses discos às costas de cada um dos três. Disse o rei: “Cada um de vós será interrogado particularmente e aquele que descobrir a cor do disco que lhe coube por sorte, será declarado o vencedor. O primeiro a ser interrogado poderá ver os discos dos outros dois, ao segundo será permitido ver o disco do terceiro, e o terceiro terá que formular a resposta sem ver nada. Aquele que der a resposta certa terá que justificá-la”.*



Aconteceu então que o príncipe Camozã quis ser o primeiro. Viu os dois discos dos seus adversários e errou. Em seguida, sabendo que Camozã havia errado, o príncipe Benefir se prontificou em ser o segundo, mas também errou. Aradim, o terceiro príncipe, acertou com absoluta segurança. Qual foi a resposta do príncipe Aradim e como ele descobriu?

Esse é o problema dos cinco discos. *Malba Tahan* dá uma inteligente solução desse problema, onde conclui também que Aradim foi considerado o mais inteligente entre os três príncipes.

Eis a solução de Malba Tahan: o príncipe Aradim afirmou que o seu disco era branco e justificou da seguinte maneira: “Se Camozã (o primeiro a falar) tivesse visto dois discos pretos, ele obviamente teria acertado. Como ele errou, conclui-se que viu dois discos brancos, ou um preto e um branco. Na hipótese de Benefir ter visto em minhas costas um disco preto, ele (usando o mesmo raciocínio que fiz com relação a Camozã) teria acertado. Logo, ele só pode ter visto um disco branco e, portanto, o meu disco é branco”.

A curiosidade que pretendemos apresentar é que, sob o ponto de vista matemático e levando em conta somente o acerto da cor do disco, a chance de erro dos dois anteriores era bem pequena, o que torna discutível a conclusão de que Aradim fosse mais inteligente que Camozã ou Benefir.

Com efeito, vamos calcular as probabilidades de acerto da cor do disco de cada um dos três príncipes, levando em conta que todos eles são sábios.

### As possíveis distribuições dos discos

Sejam  $b$  = (disco branco) e  $p$  = (disco preto). Por simplicidade escrevemos

$$A = \text{Aradim}, \quad B = \text{Benefir} \quad \text{e} \quad C = \text{Camozã}.$$

Então a ordem em que os príncipes se apresentaram para serem interrogados pode ser representada por uma terna ordenada  $(C, B, A)$ .

A título de exemplo, perguntamos quantas maneiras diferentes podem  $C$  possuir disco branco,  $B$  possuir disco preto e  $A$  possuir disco preto? Isto é, de ocorrer  $(b, p, p)$ .



Sabemos que existem três discos brancos  $b_1$ ,  $b_2$  e  $b_3$  e dois discos pretos  $p_1$  e  $p_2$ . Por uma simples contagem, obtemos seis maneiras diferentes de ocorrer  $(b, p, p)$ , a saber:

$$(b_1, p_1, p_2), (b_1, p_2, p_1), (b_2, p_1, p_2), (b_2, p_2, p_1), \\ (b_3, p_1, p_2) \text{ e } (b_3, p_2, p_1).$$

É claro que o número total de maneiras em que podem ser distribuídos os discos aos príncipes é  $A_{5,3} = 60$ . Descrevendo esses casos, obtemos:

Eventos	Frequência
$E_1 = (b, b, b)$	6
$E_2 = (p, b, b)$	12
$E_3 = (b, p, b)$	12
$E_4 = (b, b, p)$	12
$E_5 = (p, p, b)$	6
$E_6 = (p, b, p)$	6
$E_7 = (b, p, p)$	6

### Lembretes

a) Se os conjuntos unitários de um espaço amostral finito  $U$  têm todos a mesma probabilidade, então a probabilidade de um evento  $A$  qualquer de  $U$  será dada por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

onde  $n(A)$  é o número de elementos do evento  $A$  e  $n(U)$  é o número total de elementos do espaço amostral  $U$ .

b) Nas mesmas condições de a), se  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são eventos disjuntos entre si,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \frac{n(A_1) + n(A_2) + \dots + n(A_n)}{n(U)}.$$

Como o problema afirma que a escolha dos discos é feita ao acaso, segue-se que o espaço amostral associado ao problema satisfaz as condições necessárias para a validade de a) e b). Não é difícil verificar também que o acerto da cor do disco admite uma estratégia que maximiza



a probabilidade de vitória de cada concorrente e garante, com probabilidade 1, a existência de um vencedor, que certamente será único uma vez que o processo terminaria no momento em que um dos concorrentes acertasse a cor do seu disco. Como os concorrentes supostamente são sábios, é razoável admitir que eles seguirão a melhor estratégia em cada situação e portanto teremos

$$P(C) + P(B) + P(A) = 1$$

onde  $P(C)$ ,  $P(B)$  e  $P(A)$  são, respectivamente, as probabilidades de vitória de  $C$ ,  $B$  e  $A$ .

A estratégia ótima e a correspondente probabilidade de vitória de  $C$ .

Se  $C$  vir dois discos pretos nos seus adversários, saberá que restam três discos brancos. Responderá então com absoluta segurança que possui um disco branco. Assim o evento  $E_7$  lhe é favorável. Caso  $C$  veja dois discos brancos, saberá que restam dois discos pretos e um disco branco. Logo responderá possuir disco preto, contando com a probabilidade  $2/3$  de acertar. Consequentemente, o evento  $E_2$  lhe é favorável e o evento  $E_1$  lhe é desfavorável. Suponhamos agora que  $C$  tenha visto um disco branco e um disco preto em seus concorrentes. Concluirá que restam dois discos brancos e um disco preto. Logo, deverá responder que possui um disco branco, contando com a probabilidade  $2/3$  de acertar. Segue que os eventos  $E_3$  e  $E_4$  lhe são favoráveis e o evento  $E_6$  lhe é desfavorável.

Em resumo, usando essa estratégia,  $C$  irá acertar na hipótese de ter ocorrido qualquer um dos eventos disjuntos  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $E_4$  ou  $E_7$  e irá errar se houver  $E_1$ ,  $E_5$  ou  $E_6$ . Segue-se, então, que:

$$P(C) = \frac{n(E_2) + n(E_3) + n(E_4) + n(E_7)}{n(U)} = \frac{6 + 12 + 12 + 12}{60} = \frac{7}{10}.$$

Isso mostra que a probabilidade vitória do príncipe Camozã, o primeiro candidato, é de 70%, contando com a sua sabedoria, restando assim apenas 30% de probabilidade para que os outros dois príncipes tivessem chance de serem apenas interrogados.



Considerando ainda que Aradim só seria interrogado caso Benefir (o segundo interrogado) também errasse, pode-se mostrar que ele é o que teria a menor chance de ser escolhido como noivo de Dahizé.

No entanto, Aradim é possuidor de muita sorte, pois os dois primeiros concorrentes erraram.

Para completar, a probabilidade de Benefir acertar é de 20% e a probabilidade do príncipe Aradim acertar é de apenas 10%.

### **A reabilitação de Aradim**

Esse cálculo, entretanto, diz respeito só ao fato de acertar, ou não, a cor do seu disco. Acontece que o rei dissera que os príncipes deveriam, também, justificar a resposta correta.

Fica a pergunta do que o rei entendia por “justificar”.

Seria aceitável, em caso de dúvida, uma adivinhação educada, isto é, uma opção pela alternativa mais provável? Ou seria necessária uma explicação lógica de como se chegou à única alternativa correta possível? Neste caso, quais seriam as probabilidades de vitória de cada um dos três concorrentes?

Adaptado do artigo

*O problema dos cinco discos: Sorte ou Sabedoria?*

Ma-To Fu e Roberto Elias, **RPM** 11.



## Calculadora padrão: um problema interessante

Suponhamos que você tem uma calculadora de bolso, padrão, de 8 dígitos, que efetua as quatro operações,  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$  e extrai raízes quadradas. Será possível, usando essa calculadora, extrair a raiz  $n$ -ésima de um número qualquer?

Na verdade, dado um número real  $x$ , não negativo, usando somente as teclas  $\sqrt{\quad}$ ,  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$  é possível achar  $x^{p/q}$ , onde  $p$  e  $q$  são números naturais. Vamos explicar como isso é possível mostrando alguns exemplos.

**Exemplo 1:** Calcule  $\sqrt[3]{5}$ .

Seja  $x = \sqrt[3]{5}$ . Então  $x^3 = 5$ . Multiplicando por  $x$  os dois lados da igualdade, obtemos  $x^4 = 5x$  ou  $x = \sqrt[4]{5x}$ .

Inicialmente criamos uma sequência de números reais sendo  $x_1$  uma aproximação de  $\sqrt[3]{5}$  (por exemplo,  $x_1 = 1$ ) e  $x_{n+1} = \sqrt[4]{5x_n}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Vamos mostrar os valores de alguns termos da sequência obtidos na calculadora e, em seguida vamos dar uma justificativa do por que a sequência converge para  $\sqrt[3]{5}$ .

Tomemos  $x_1 = 1$ . Então,  $x_2 = \sqrt[4]{5}$ ,  $x_3 = \sqrt[4]{5\sqrt[4]{5}}$ , e assim por diante.



Vejam os valores calculados sendo que a notação [\*] significa que apertamos a tecla “\*”:

$$[5][\sqrt{\quad}][\sqrt{\quad}] \rightarrow 1.4953487$$

Com o valor anterior mantido na tela, fazemos

$$[\times][5][=][\sqrt{\quad}][\sqrt{\quad}] \rightarrow 1.653591$$

Repetindo sempre os comandos  $[\times][5][=][\sqrt{\quad}][\sqrt{\quad}]$  obtemos

1.6957019  
1.7063962  
1.7090802  
1.7097519  
1.7099199  
1.7099619  
1.7099724  
1.7099750  
1.7099757  
1.7099758  
1.7099759  
1.7099759,

o que indica que uma aproximação para  $\sqrt[3]{5}$  com erro menor que  $10^{-7}$  é 1,7099759.

Uma idéia do por que funciona: consideremos a expressão

$\sqrt[4]{5^4 \sqrt[4]{5^4 \sqrt[4]{5^4 \sqrt[4]{5^4 \dots}}}}$  com infinitos radicais. Podemos escrever

$$\sqrt[4]{5^4 \sqrt[4]{5^4 \sqrt[4]{5^4 \sqrt[4]{5^4 \dots}}}} = 5^{\frac{1}{4}} \times 5^{\frac{1}{16}} \times 5^{\frac{1}{64}} \times 5^{\frac{1}{256}} \dots = 5^{\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} \dots}$$

Sabemos que  $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$ , pela fórmula da

soma dos termos de uma PG infinita, logo, temos

$\sqrt[4]{5^4 \sqrt[4]{5^4 \sqrt[4]{5^4 \sqrt[4]{5^4 \dots}}}} = 5^{1/3} = \sqrt[3]{5} = x$ . Ou seja, admitindo que existe o limite de  $x_n$  quando  $n$  tende ao infinito, então, esse limite será  $\sqrt[3]{5}$ .



Um outro modo de verificar o valor  $x$  do limite da sequência (admitindo que esse limite exista) é:

$x = \sqrt[4]{5\sqrt[4]{5\sqrt[4]{5\sqrt[4]{5\cdots}}}}$ , logo,  $x^4 = 5\sqrt[4]{5\sqrt[4]{5\sqrt[4]{5\cdots}}} = 5x$ . Como  $x$  é diferente de zero, a igualdade implica  $x = \sqrt[3]{5}$ .

**Exemplo 2:** Calcule  $\sqrt[5]{5}$ .

Seja  $x = \sqrt[5]{5}$ . Então,  $x^5 = 5$  e vemos que  $x^8 = x^5 x^3 = 5x^3$  que implica  $x = \sqrt[8]{5x^3}$ . Vamos construir uma sequência  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ , com  $x_1=1$  e os outros termos como na tabela, usando a calculadora para obter os números após as flechas.

$$x_2 = \sqrt[8]{5x_1^3} = \sqrt[8]{5} = 5^{\frac{1}{8}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}} \rightarrow 1.2228445$$

$$x_3 = \sqrt[8]{5x_2^3} = \sqrt[8]{5\sqrt[8]{5^3}} = 5^{\frac{1}{8} + \frac{3}{64}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{5\sqrt{\sqrt{\sqrt{125}}}}}} \rightarrow 1.3186680$$

$$x_4 = \sqrt[8]{5x_3^3} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{5\sqrt{\sqrt{\sqrt{125\sqrt{\sqrt{\sqrt{5^9}}}}}}}}} = 5^{\frac{1}{8} + \frac{3}{64} + \frac{9}{8 \times 64}} \rightarrow 1.3565069$$

$$x_5 = 5^{\frac{1}{8} + \frac{3}{8^2} + \frac{9}{8^3} + \frac{27}{8^4}}$$

$$x_6 = 5^{\frac{1}{8} + \frac{3}{8^2} + \frac{9}{8^3} + \frac{27}{8^4} + \frac{81}{8^5}}$$

⋮

Aqui, a cada passo, utilizamos apenas as teclas  $[\times]$ ,  $[5]$ ,  $[=]$  e  $[\sqrt{\quad}]$ .

Novamente aceitando que a sequência escolhida converge para um limite  $x$  diferente de zero, podemos fazer:

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8^2} + \frac{9}{8^3} + \frac{27}{8^4} + \cdots = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{3}{8}} = \frac{1}{5}, \text{ logo,}$$

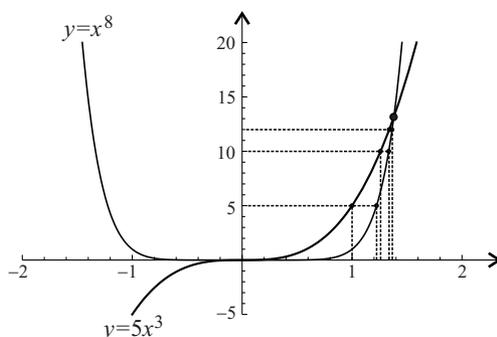
$$x = 5^{\frac{1}{8} + \frac{3}{8^2} + \frac{9}{8^3} + \frac{27}{8^4} + \cdots} = 5^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{5}.$$



Ou, como no exemplo anterior, elevando  $x$  a oitava potência, obtemos  $x^8 = 5x^3$ , e como  $x$  é diferente de zero vem que  $x = \sqrt[5]{5}$ .

A argumentação dos exemplos apresentados foi baseada no fato de que a sucessão  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$  converge. Isso realmente acontece? Vamos responder a essa pergunta no caso do último exemplo.

Os gráficos das funções  $y = x^8$  e  $y = 5x^3$  estão mostrados na figura abaixo e como o número procurado,  $x = \sqrt[5]{5}$ , satisfaz  $x^8 = 5x^3$ , vemos que  $x$  será a bscissa não nula do ponto de intersecção dos dois gráficos.



Partindo, por exemplo, de  $x_1=1$ , examinemos a sucessão de pontos, representados no gráfico:

$$P_1 = (1, 0); \quad P_2 = (1, 5); \quad P_3 = (\sqrt[8]{5}, 5); \quad P_4 = (\sqrt[8]{5}, 5\sqrt[8]{5^3});$$

$$P_5 = (\sqrt[8]{5\sqrt[8]{5^3}}, 5\sqrt[8]{5^3}); \quad P_6 = (\sqrt[8]{5\sqrt[8]{5^3}}, 5\sqrt[8]{5^3\sqrt[8]{5^9}}); \quad \dots$$

Observe que os pontos  $P_2, P_4, P_6, \dots$  pertencem ao gráfico de  $y = 5x^3$  e que os pontos  $P_3, P_5, P_7, \dots$  pertencem ao gráfico de  $y = x^8$ .

A sucessão de todos os pontos converge para o ponto de intersecção dos dois gráficos que é o ponto  $P = (\sqrt[5]{5}, \sqrt[5]{5^8})$ , o que mostra que a

sucessão das abscissas  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$  converge para  $x = \sqrt[5]{5}$ . Isso é mostrado rigorosamente usando-se técnicas de Análise Real.

Quanto a escolha  $x_1=1$ , ela foi feita simplesmente para facilitar os



cálculos e também por sabermos que  $\sqrt[5]{5}$  está próximo de 1. Se tivéssemos escolhido qualquer outro valor, por exemplo,  $x_1=100$ , o limite da sucessão  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$  continuaria satisfazendo  $x^8 = 5x^3$ .

$y = x^8$  e  $y = 5x^3$  estão mostrados na figura a seguir e como o número procurado,  $x = \sqrt[5]{5}$ , satisfaz  $x^8 = 5x^3$ , vemos que  $x$  será exatamente a abscissa, com  $x \neq 0$ , do ponto de intersecção dos gráficos de  $y = x^8$  e  $y = 5x^3$ .

Ora, o fato algébrico de que a raiz  $x^8 = 5x^3$  existe, é equivalente ao fato de que os gráficos se cortam. Para  $0 \leq x \leq \sqrt[5]{5} \approx 1,379$ , o gráfico de  $y = x^8$  estará acima do gráfico de  $y = 5x^3$ .

Partindo de um valor arbitrário, por exemplo,  $x_1 = 1$ , examinemos a seguinte sucessão de pontos do plano cartesiano, representados no gráfico

acima:  $P_1 = (1, 0)$ ;  $P_2 = (1, 5)$ ;  $P_3 = (\sqrt[8]{5}, 5)$ ;  $P_4 = (\sqrt[8]{5}, 5 \times \sqrt[8]{5^3})$ ;

$P_5 = (\sqrt[8]{5 \times \sqrt[8]{5^3}}, 5 \times \sqrt[8]{5^3})$ ;  $P_6 = (\sqrt[8]{5 \times \sqrt[8]{5^3}}, 5 \times \sqrt[8]{5^3 \times \sqrt[8]{5^9}})$ ;...

Observe que os pontos  $P_2, P_4, P_6, \dots$  estão sobre o gráfico de  $y = 5x^3$  e que os pontos  $P_3, P_5, P_7, \dots$  estão sobre o gráfico de  $y = x^8$ .

Os pontos  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$  convergem para o ponto  $P = (5^{1/5}, 5^{8/5})$ , que é exatamente o ponto de intersecção dos dois gráficos. É então óbvio que a sucessão  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$  converge exatamente para  $\sqrt[5]{5}$ . Pode-se mostrar, rigorosamente, usando as técnicas de Análise Real, que isso realmente acontece.

Quanto a escolha,  $x_1=1$ , ela foi feita simplesmente para facilitar os cálculos e também por sabermos que  $\sqrt[5]{5}$  está próximo de 1. Se tivéssemos escolhido qualquer outro valor para  $x_1$ , por exemplo,  $x_1=100$ , o limite da sucessão, que estamos supondo existir, continuaria satisfazendo  $x^8 = 5x^3$ .



Você certamente já percebeu o procedimento geral: se quisermos calcular  $x = \sqrt[n]{a}$  ou seja, achar  $x$  tal que  $x^n = a$ , devemos transformar essa igualdade de modo a obter, do lado esquerdo, um expoente que seja uma potência de 2. Isso é feito multiplicando-se os dois membros por uma potência conveniente de  $x$ . Assim, por exemplo, se  $x = \sqrt[11]{a}$  então  $x^{11} = a$ , que implica  $x^{16} = x^{11}x^5 = a x^5$  ou  $x = \sqrt[16]{ax^5}$  e utilizaremos a sucessão  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ , na qual  $x_{n+1} = \sqrt[16]{ax_n^5}$ .

Adaptado dos artigos

*Vamos usar a calculadora?*

Hideo Kamayama e Eduardo Wagner, **RPM** 26.

*Vamos continuar usando a calculadora*

João Bosco Pitombeira de Carvalho, **RPM** 51.





## Uma equação interessante

Há algum tempo, um amigo professor mostrou-me a equação

$$\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1$$

e fez a seguinte observação: apesar de, no decorrer da resolução, elevarmos as equações somente a potências *ímpares* (duas elevações ao cubo), ainda assim, surpreendentemente, aparece uma raiz falsa. Por quê?

Antes de mostrar como o professor resolveu a equação, vejamos o porquê da sua surpresa.

Sabemos que  $x = y \Rightarrow x^n = y^n, \forall x, y \in R, n \in N$ ,

mas a recíproca desta afirmação só é verdadeira se  $n$  for ímpar. Isto é,

$$x^n = y^n \Rightarrow x = y, \forall x, y \in R, \text{ se } n \text{ for ímpar.}$$

É fácil ver que a propriedade  $x^n = y^n \Rightarrow x = y$  não vale se  $n$  for par – basta observar que  $5^2 = (-5)^2$  e  $5 \neq -5$ . O que vale é:

$$x^n = y^n \Leftrightarrow |x| = |y|, \forall x, y \in R, \forall n \in N.$$

As falsas soluções aparecem nitidamente quando, resolvemos equações irracionais. Vejamos um exemplo: Quais são as soluções da equação

$$\sqrt{2x-3} = x-3?$$



$$\begin{aligned} \sqrt{2x-3} = x-3 &\stackrel{1}{\Rightarrow} (\sqrt{2x-3})^2 = (x-3)^2 \stackrel{2}{\Leftrightarrow} 2x-3 = \\ &= x^2 - 6x + 9 \stackrel{3}{\Leftrightarrow} x^2 - 8x + 12 = 0 \stackrel{4}{\Leftrightarrow} x = 6 \text{ ou } x = 2. \end{aligned}$$

As passagens 2, 3 e 4 são equivalências, mas a recíproca da implicação 1 não é verdadeira. É por isso que, após resolvermos a equação, “testamos” as raízes encontradas, para ver se elas, de fato, satisfazem a equação inicial. No exemplo, 6 é raiz de (2), mas 2 não é.

Portanto, estamos acostumados com o aparecimento de “falsas raízes” na resolução de equações irracionais.

Mas, no exemplo que o professor apresentou, o fato de aparecer uma “raiz falsa” era estranho, pois a resolução da equação exigia apenas que seus membros fossem elevados ao cubo e sabemos que, em  $R$ ,

$$x^3 = y^3 \Leftrightarrow x = y.$$

Vejamos como o professor resolveu a equação:

$$\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1. \quad (1)$$

Elevando ao cubo, obtemos

$$2x-1 + 3(\sqrt[3]{2x-1})^2 \cdot \sqrt[3]{x-1} + 3\sqrt[3]{2x-1} \cdot (\sqrt[3]{x-1})^2 + x-1 = 1 \quad (2)$$

$$3x-2 + 3\sqrt[3]{2x-1} \cdot \sqrt[3]{x-1} (\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1}) = 1 \quad (3)$$

o termo entre parênteses vale 1 (é a própria equação (1)!)

$$3x-2 + 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} = 1 \quad (4)$$

$$3x + 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} = 3 \quad (5)$$

$$\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 1} = 1 - x \quad (6)$$

$$2x^2 - 3x + 1 = (1-x)^3 \quad (7)$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 \quad (8)$$

$$x^3 - x^2 = 0. \quad (9)$$

E, portanto,  $x = 0$  ou  $x = 1$ .

Verifica-se, por substituição em (1), que 1 é solução, mas 0 não é.



Onde e por que apareceu essa falsa raiz?

Sugiro que o leitor tente responder a essa pergunta antes de prosseguir.

Observe que  $x = 0$  não é solução das equações (1), (2) e (3), mas é solução das equações a partir de (4). Na verdade, (1), (2) e (3) são equivalentes entre si (possuem o mesmo conjunto solução), e as equações de (4) a (9) também são equivalentes entre si, mas (3) e (4) não são equivalentes. Foi nessa passagem que fizemos algo “ilícito”.

O que fizemos para passar de (3) a (4)? Ora, usamos novamente a equação (1) substituindo  $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1}$  por 1, e esse procedimento não gera uma equação equivalente à anterior. Tendo duas equações equivalentes, (1) e (3), se substituirmos uma na outra, obtemos uma nova equação que é consequência das anteriores, mas não é, necessariamente, equivalente a elas. Assim  $(3) \Rightarrow (4)$ , mas não vale a recíproca.

Vejamos um exemplo onde esse fato é mais evidente:

$$x = 2 \text{ (o conjunto solução é } \{2\}\text{),}$$

$$2 = x \text{ (equivalente a de cima).}$$

Substituindo uma na outra, obtemos

$$x = x, \text{ cujo conjunto solução é } R!$$

Assim, o aparecimento de uma raiz falsa não está ligado ao fato de a equação ser irracional nem às potências que tomamos, e sim, ao procedimento da resolução.

Mais uma palavra sobre esse fato: o “truque” utilizado na passagem de (3) para (4) é útil, pois “limpou” a equação, mas não é uma equivalência – não podemos perder de vista a equação original. Situações como essa são comuns, por exemplo, na trigonometria quando usamos, numa equação, a identidade  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ .

Vamos ilustrar o aparecimento de falsas raízes através de mais dois exemplos:

$$x = 1 - x \text{ (e, portanto, } x = 1/2\text{).}$$

Se elevarmos ambos os membros ao cubo, teremos:



$$x = 1 - x \Leftrightarrow x^3 = (1 - x)^3 \Leftrightarrow x^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 \Rightarrow$$

(substituindo  $x$  por  $1 - x$ )

$$x^3 = 1 - 3(1 - x) + 3x^2 - x^3 \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow x = 1/2; x = -1; x = 2.$$

Outro exemplo:

$$x = 1.$$

$$x = 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow$$

(substituindo  $x$  por 1)

$$x^2 - 2.1 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

Adaptado do artigo

*Uma equação interessante*

Cláudio Possani, **RPM** 19.





## PAINÉIS

---

### Painel I

#### O número 12

Ao número 12 são atribuídos muitos significados, sobretudo de índole religiosa ou espiritual, cuja influência provocou alguns efeitos na organização de nosso cotidiano.

Na historiografia judaico-cristã, temos os 12 filhos de Jacob, filho de Isaac e neto de Abraão, dos quais derivaram as 12 tribos de Israel. Refere-se ainda que Jacob usava um peitoral sobre o qual haviam sido incrustadas 12 pedras preciosas que são a revelação de 12 poderes cósmicos. Também a coroa usada na sagração da monarquia inglesa tem 12 pedras preciosas.

São 12 os deuses principais da mitologia grega, que vivem no Monte Olimpo. O ano tem 12 meses. O zodíaco divide a esfera celeste em 12 casas. O relógio está dividido em 12 horas.

A bandeira da União Européia tem 12 estrelas douradas, que, segundo a Comissão Européia, representam a “solidariedade e harmonia entre os povos da Europa”, porque o número 12 é “tradicionalmente um símbolo de perfeição, de plenitude e de união”.

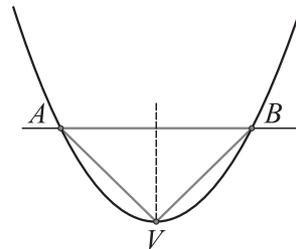
Não consigo acreditar que os números tenham algum significado que os transcenda, porém creio que a natureza abstrata dos números propicia a sua utilização como representantes de significados que os transcendem. Atribuições e interpretações do significado do número 12, sobretudo relacionadas com questões religiosas e sociais, decorrem do fato, do domínio aritmético, de 12 ser o produto de 3 por 4 e, além disso, parece-me que o fato de 12 ter muitos divisores, 1, 2, 3, 4, 6 e 12, pode ter ajudado na sua



projeção. É que, entre as quatro operações aritméticas elementares efetuadas no conjunto dos números inteiros, a divisão é a única que nem sempre dá resultados inteiros, sendo uma minoria os casos em que isso acontece. Conjugando esse fato com a circunstância de que a maioria dos seres humanos se mostra mais disponível para o cálculo com inteiros do que com outros tipos de números, compreende-se a importância dada aos números inteiros que se evidenciam por terem muitos divisores como 12, 24 e 60, por exemplo.

Mas o objetivo deste artigo é mostrar uma intervenção do número 12 numa relação entre os domínios algébrico e geométrico. Consideremos uma função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  com  $a > 0$  e  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ , condição essa, como bem sabemos, que implica a existência de duas raízes reais distintas da equação  $ax^2 + bx + c = 0$ . Essas raízes são as abscissas dos pontos em que a parábola, gráfico de  $f$ , intersecta o eixo  $x$ .

Consideramos o triângulo formado pelos pontos  $A$ ,  $B$  e pelo ponto  $V$ , vértice da parábola, como na figura. Esse triângulo é isósceles, já que  $AV = VB$ . Vamos verificar que o muito falado número 12 relaciona a função quadrática com a possibilidade de o triângulo  $AVB$  ser equilátero.



Como é conhecido, as coordenadas dos pontos  $A$ ,  $V$  e  $B$  são dadas em função dos coeficientes da função quadrática:

$$A = \left( \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; 0 \right), \quad B = \left( \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; 0 \right) \quad \text{e} \quad V = \left( \frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a} \right).$$

Podemos usar o teorema de Pitágoras para calcular  $AV$ :

$$AV^2 = \left( \frac{-\Delta}{4a} \right)^2 + \left( \frac{-b - (-b - \sqrt{\Delta})}{2a} \right)^2 \quad \text{ou} \quad AV = \frac{\sqrt{\Delta(\Delta + 4)}}{4a}.$$

$$\text{Por outro lado, } AB = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}.$$



Para que  $AVB$  seja equilátero, devemos ter  $AB = AV$ , o que é equivalente a  $12\Delta = \Delta^2$  ou, como  $\Delta > 0$ , é equivalente a  $\Delta = 12$ .

Adaptado do artigo  
*O número 12*  
Carlos Grosso, **RPM** 67.



## Painel II

### Sexta-feira 13

As pessoas criaram um mito sobre as sextas-feiras 13, dizendo que essas datas são propícias para ocorrer coisas macabras, horríveis... Parece que nas últimas décadas esse mito foi bastante reforçado e divulgado pela série de filmes *Sexta-feira 13* que o cinema exibiu. Mas não são apenas coisas ruins que estão ligadas à sexta-feira 13, muito pelo contrário; temos um belo problema de Matemática: todo ano há pelo menos uma sexta-feira 13.

Para verificarmos o prometido, vamos inicialmente enumerar os dias 13 de um determinado ano. Para isso imaginemos um ano de 365 dias (se o ano tiver 366 dias, o mesmo método funciona!). Lembre que, num ano de 365 dias, os meses de janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro e dezembro têm 31 dias, enquanto abril, junho, setembro e novembro têm 30 dias e fevereiro tem 28 dias. Assim, temos que:

1º de janeiro → dia 1	13 de março → dia 72
2 de janeiro → dia 2	...
3 de janeiro → dia 3	13 de abril → dia 103
...	...
13 de janeiro → dia 13	13 de maio → dia 133
...	...
13 de fevereiro → dia 44	13 de junho → dia 164



13 de julho → dia 194  
13 de agosto → dia 225  
13 de setembro → dia 256  
13 de outubro → dia 286  
13 de novembro → dia 317  
13 de dezembro → dia 347

Assim, temos que os dias 13 de um determinado ano de 365 dias são 13, 44, 72, 103, 133, 164, 194, 225, 256, 286, 317 e 347, que, quando divididos por 7 (uma semana tem sete dias), deixam restos 6, 2, 2, 5, 0, 3, 5, 1, 4, 6, 2 e 4, respectivamente. Perceba que todos os restos possíveis de uma divisão por 7 apareceram, isto é, 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Assim, perceba que:

se a primeira sexta-feira do ano for dia  $x$  ( $x$  é no máximo 7), as sextas-feiras seguintes serão os dias  $x + 7$ ,  $x + 14$ ,  $x + 21$ , ... Se, por exemplo,  $x$  for 7, então todas as sextas-feiras do ano cairão nos dias 7, 14, 21, 28, 35, 42, ... do referido ano. Como entre os dias 13 há um que é múltiplo de 7 (o dia 133), segue que esse dia será uma sexta-feira 13 (isso ocorreu em 2005; veja que 13 de maio de 2005 foi uma sexta-feira 13). Seguindo o mesmo raciocínio, se a primeira sexta-feira do ano fosse dia 6 de janeiro, então as sextas-feiras seriam os dias 6, 13, 20, 27, 34, 41, ... Como entre os dias 13 há um cujo resto da divisão por 7 é 6 (o dia 13), segue que, nesse ano, 13 de janeiro seria uma sexta-feira 13.

Esse raciocínio mostra que em qualquer ano existe pelo menos uma sexta-feira 13. Perceba que pode haver mais de uma sexta-feira 13. Se, por exemplo, o dia 2 de janeiro for uma sexta-feira, então as demais sextas-feiras desse ano serão os dias 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, ..., ou seja, os dias que deixam resto 2 quando divididos por 7.

Assim, em um ano de 365 dias em que 2 de janeiro é uma sexta-feira,



os dias 44, 72 e 317 (que divididos por 7 deixam resto 2) seriam sextas-feiras 13. Noutras palavras, 13 de fevereiro, 13 de março e 13 de novembro seriam sextas-feiras 13 (que ano azarado, hein??? Prepare-se, 2009 será assim!).

Adaptado do artigo

*Sexta-feira 13*

Carlos A. Gomes, RPM 59.



### Painel III

#### O jogo de bilhar

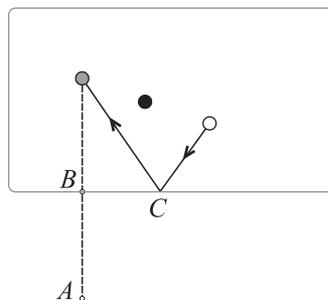
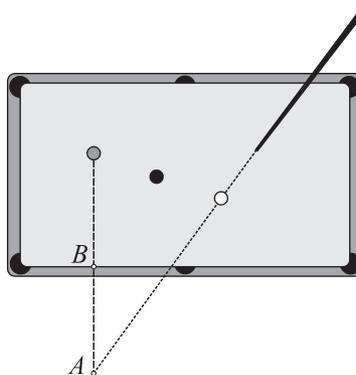
Estava numa pousada, no salão de jogos, observando uma partida de bilhar. Em dado momento, apresentou-se a situação ilustrada na figura, sendo que o jogador precisava acertar a bola cinza, mas não podia bater na bola preta.

Para ajudar, um amigo do jogador adotou a estratégia:

- mediu, com um outro taco, colocado apoiado na direção perpendicular à borda da mesa, como na figura, a distância  $d$  da bola cinza até o ponto  $B$ , na borda da mesa.
- marcou nesse taco o ponto  $A$  tal que a distância  $BA$  vale  $d$ .
- disse ao jogador para mirar no ponto  $A$  e bater na bola branca.

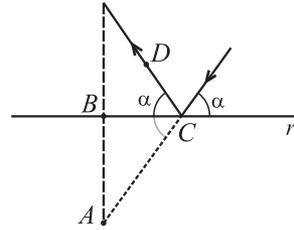
Ao bater no ponto  $C$ , na borda da mesa, a bola branca, no movimento refletido, acertou a bola cinza.

A pergunta que me ocorreu foi: Por que deu certo? A resposta fundamenta-se na lei física que afirma que, na





situação descrita, a medida  $\alpha$  do ângulo de incidência da bola, ao bater na mesa, é igual ao ângulo de reflexão. O ângulo  $BCA$  e o ângulo de incidência são opostos pelo vértice, logo têm a mesma medida  $\alpha$ , mostrando que a reta  $r$  é a bissetriz do ângulo  $DCA$ , sendo  $D$  um ponto da trajetória de reflexão. Em consequência, o simétrico de  $A$ , em relação a  $r$ , que é o ponto no qual está a bola cinza, pertence à reta  $CD$ . Logo, a trajetória de reflexão da bola branca passa pela bola cinza.



Além disso, a estratégia adotada fornece a trajetória de menor percurso para a bola branca atingir a bola cinza nas condições do problema. Isso é garantido pelo teorema a seguir, atribuído a Heron, matemático de Alexandria que viveu no primeiro século depois de Cristo.

### Teorema de Heron

Dada uma reta  $r$  e dois pontos  $P$  e  $Q$ , no mesmo lado da reta  $r$ , o ponto  $R$  sobre a reta  $r$  tal que a distância  $PR + RQ$  é a menor possível é aquele em que os ângulos que os segmentos  $PR$  e  $RQ$  fazem com a reta  $r$  são iguais.

### Demonstração do teorema

Seja  $Q'$  o simétrico de  $Q$  em relação à reta  $r$ . Por hipótese, a reta  $r$  bissecciona o ângulo  $QRQ'$ . Segue, por congruência de triângulos, a igualdade  $QR = Q'R$ . Seja  $R'$  qualquer ponto sobre a reta  $r$ , diferente de  $R$ .

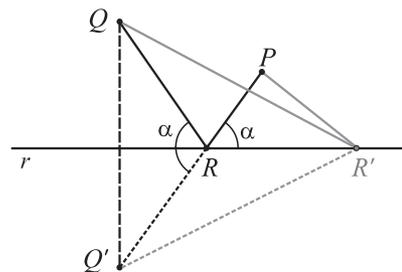
Então,

$$QR + RP = Q'R + RP = Q'P.$$

Mas

$$Q'P < Q'R' + R'P = QR' + R'P.$$

$$\text{Logo, } QR + RP < QR' + R'P.$$



Adaptado do artigo  
*O jogo de bilhar*  
José Carlos Magossi, **RPM** 69.

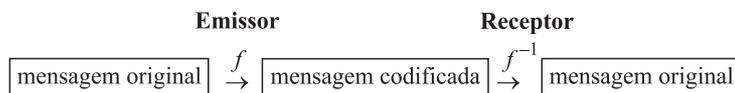


## Painel IV

### Codificando e decifrando mensagens

Operações de serviços disponíveis na Internet, movimentações bancárias e outras transações eletrônicas necessitam da criptografia para comunicação confidencial de dados.

A palavra criptografia tem origem grega (*kripto* = escondido, oculto; *grapho* = grafia) e define a arte ou ciência de escrever mensagens em códigos, de forma que somente pessoas autorizadas possam decifrá-las. A criptografia é tão antiga quanto a própria escrita; já estava presente no sistema de escrita hieroglífica dos egípcios e os romanos utilizavam códigos secretos para comunicar planos de batalha. Contudo, desde aquele tempo, seu princípio básico continua o mesmo: encontrar uma transformação (função) injetiva  $f$  entre um conjunto de mensagens escritas em um determinado alfabeto (de letras, números ou outros símbolos) para um conjunto de mensagens codificadas. O fato de  $f$  ser inversível é a garantia de o processo ser reversível e as mensagens poderem ser reveladas pelos receptores. O grande desafio de um processo criptográfico, portanto, está em ocultar eficientemente os mecanismos (chaves) para a inversão de  $f$ , de modo que estranhos não possam fazê-lo.



Descreveremos aqui dois exemplos elementares de processos criptográficos, sendo o primeiro acessível inclusive para alunos do ensino fundamental.

Inicialmente, relacionamos números ao alfabeto (o símbolo # representa um espaço em branco) que vamos utilizar nos modelos. Assim:

#	A	B	...	J	K	L	...	V	W	X	Y	Z
0	1	2	...	10	11	12	...	22	23	24	25	26

Portanto, cifrar uma mensagem recai no problema de permutar números por meio de uma regra  $f$ . Pode-se fazer isso, de forma muito



prática, por exemplo, através das funções afins  $f(x) = ax + b$  com  $a, b$  inteiros,  $a \neq 0$ , definidas no conjunto  $\{0, 1, \dots, 26\}$ . Suponhamos que Ana e Ivo desejem trocar mensagens sigilosas utilizando o alfabeto escolhido. O primeiro passo a tomarem é definirem a função cifradora, digamos  $f(x) = 2x - 3$ . Assim, por exemplo,

à mensagem **R E V I S T A R P M**  
Ana associa a sequência numérica 18 5 22 9 19 20 1 0 18 16 13

mas transmite a Ivo a sequência numérica obtida pelas imagens de  $f$ , isto é,

33 7 41 15 35 37 -1 -3 33 29 23.

Ao recebê-la, Ivo, calculando a imagem de  $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$  nessa sequência e utilizando a correspondência alfabeto-numérica, obtém a mensagem original.

Depois de os alunos dominarem o processo, seria oportuno que o professor propusesse situações em que um intruso tente decifrar mensagens apoderando-se das sequências numéricas codificadas. Como estamos utilizando funções afins, para tanto é suficiente apenas duas associações corretas entre números das sequências original e codificada. Admitindo conhecidas essas associações, é um exercício interessante para os alunos determinarem  $f$ .

O segundo método criptográfico que apresentaremos utiliza matrizes invertíveis como chaves, o que dificulta um pouco mais sua violação.

Suponhamos que Ana e Ivo combinem previamente utilizar a matriz

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  e sua inversa  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  como chaves. Para trans-

mitir a mesma mensagem acima, Ana inicialmente monta uma matriz mensagem  $M$  dispondo a sequência numérica associada em coluna e completa a posição restante com 0, ou seja, obtém

$$M = \begin{pmatrix} 18 & 22 & 19 & 1 & 18 & 13 \\ 5 & 9 & 20 & 0 & 16 & 0 \end{pmatrix}.$$

Em seguida, codifica-a calculando,



$$AM = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 & 22 & 19 & 1 & 18 & 13 \\ 5 & 9 & 20 & 0 & 16 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 84 & 97 & 3 & 86 & 39 \\ 23 & 31 & 39 & 1 & 34 & 13 \end{pmatrix}$$

e transmite a seqüência 64 23 84 31 97 39 3 1 86 34 39 13. Para ler a mensagem recebida, Ivo, da mesma forma, restaura a forma matricial  $AM$ , e em seguida, com sua chave  $A^{-1}$ , pode recuperar  $M$  através da identidade matricial,  $M = A^{-1}(AM)$ .

Os métodos tratados neste trabalho tem apenas caráter instrutivo. Na prática atual são pouco utilizados pela inconveniência de exigirem trocas prévias de chaves entre os usuários. São, portanto, inviáveis na descrição de transações eletrônicas nas quais um único receptor recebe dados de milhares de emissores, como ocorre em vendas pela Internet, transações bancárias e outras. Mesmo nesses casos mais complexos, a Matemática resolveu a trama, e desta vez, quem diria, o ramo da Teoria dos Números. O leitor interessado neste envolvente tema poderá consultar a apostila Criptografia, IC-OBMEP 2007.

Adaptado do artigo

*Codificando e decifrando mensagens*  
Antonio Carlos Tamarozzi, **RPM** 45.



## Painel V

### Qual a relação entre os números 102.564 e 410.256?

Facilmente observamos que o segundo número do título, 410 256, é o quádruplo do primeiro, 102 564. O que nos chama a atenção é que os algarismos desses números são os mesmos, tendo sido o bastante trasladarmos o algarismo 4 das unidades do primeiro número para a esquerda, a fim de obtermos o segundo número.

Admitamos agora a questão sendo apresentada sob o seguinte aspecto: determinar um número inteiro positivo  $N$ , formado de  $n$  algarismos e terminando pelo algarismo 4, tal que ao trasladarmos esse 4 (algarismo das unidades) para a primeira posição, obtemos outro número que é o quádruplo desse número  $N$ .



### Resolução

Seja  $N = a_1a_2a_3\dots a_{n-1}4$  um número de  $n$  algarismos,  $n$  natural não nulo. Retirando o algarismo 4 desse número, obtemos:

$$N' = \frac{N-4}{10} = a_1a_2a_3\dots a_{n-1}. \text{ [No exemplo: } 10256 = (102\ 564 - 4)/10.]$$

Colocando o algarismo 4 à esquerda do primeiro algarismo de  $N$ , obtemos

$$N'' = 4a_1a_2a_3\dots a_{n-1} = 4 \cdot 10^{n-1} + a_1a_2a_3\dots a_{n-1} = 4 \cdot 10^{n-1} + \frac{N-4}{10}.$$

Para que  $N'' = 4N$  precisamos ter

$$4N = 4 \cdot 10^{n-1} + \frac{N-4}{10} \Rightarrow 40N = 4 \cdot 10^n + N - 4 \Rightarrow N = \frac{4(10^n - 1)}{39}.$$

Para  $N$  ser inteiro, devemos ter 39 como divisor de  $10^n - 1$ . O menor valor de  $n$  que satisfaz essa condição é  $n = 6$ :

$$N = \frac{4(10^6 - 1)}{39} = \frac{4(999999)}{39} = 4 \times 25641 = 102564. \quad N'' = 410256 = 4N.$$

Podemos mostrar que, fazendo  $n = 6k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , obtemos todos os números  $N$  terminados em 4 e que satisfazem a condição procurada; logo,  $N = \frac{4(10^{6k} - 1)}{39}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, k \in \mathbb{N}^*$ .

### Exemplos

Para  $k = 2$ , obtemos  $N = \frac{4(10^{12} - 1)}{39}$ , donde  $N = 4 \times 25641025641 = 102564102564$ .

Para  $k = 3$ , obtemos  $N = \frac{4(10^{18} - 1)}{39}$ , donde

$$N = 4 \times 2564102564125641 = 102564102564102564.$$

Podemos propor problemas semelhantes ao anterior, como, por exemplo, obter um número inteiro positivo  $N$ , formado por  $n$  algarismos e terminando com o algarismo  $a$ , tal que ao trasladarmos esse  $a$  (algarismo das unidades) para a primeira posição, temos como resultado



outro número que é igual a  $aN$ . Procure obter  $N$  fazendo  $a = 1, 2, 3, \dots, 9$ , verificando os resultados curiosos que serão obtidos, podendo, em alguns casos, não haver solução.

Adaptado do artigo

*Qual a relação que existe entre os números 102.564 e 410.256?*

Augusto Manoel de Albuquerque Barros, **RPM** 63.



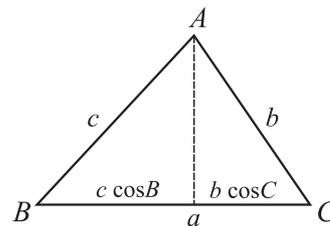
## Painel VI

### Uma demonstração visual para a fórmula do $\text{sen}(A + B)$

Cada um tem a sua demonstração favorita das importantes fórmulas de  $\text{sen}(A \pm B)$  e  $\text{cos}(A \pm B)$ . De qualquer forma, é sabido que, deduzida uma delas, as outras podem ser obtidas por complemento, suplemento, etc. Uma das mais simples e rápidas é uma demonstração “visual”, que se baseia, na igualdade

$$a = b \cos C + c \cos B$$

onde  $a, b, c, A, B, C$  são os lados e ângulos respectivos de um triângulo. A igualdade pode ser obtida facilmente e diz apenas que o lado  $a$  é a soma (ou a diferença, se  $B$  ou  $C$  for obtuso) das projeções ortogonais dos lados  $b$  e  $c$  sobre o próprio  $a$ , como se vê na figura ao lado.



Por outro lado, é também bastante conhecida a lei dos senos em um triângulo, segundo a qual:

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C} = 2R$$

onde  $R$  é o raio do círculo circunscrito. Isso decorre imediatamente da figura da página seguinte.

Então num círculo de diâmetro 1, tem-se:  $a = \text{sen}A$ ,  $b = \text{sen}B$  e  $c = \text{sen}C$ .



Para um triângulo inscrito nesse círculo, a igualdade inicial fica:

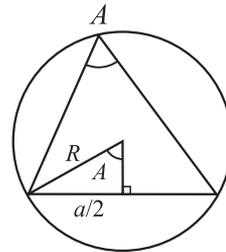
$$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} B \cos C + \operatorname{sen} C \cos B .$$

E como, finalmente, o ângulo  $A$  é o suplemento de  $B + C$ , ou seja, têm o mesmo seno, obtém-se a célebre fórmula:

$$\operatorname{sen}(B + C) = \operatorname{sen} B \cos C + \operatorname{sen} C \cos B .$$

Essa dedução é válida para  $B + C < 180^\circ$ , o que é suficiente para deduzir o caso geral.

A demonstração anterior baseia-se numa ideia de S.H. Kung, encontrada na revista *Mathematics Magazine*, vol. 64, nº 2, abril de 1991.



$$\operatorname{sen} A = \frac{a/2}{R} \rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} A} = 2R$$

Adaptado do artigo

*Demonstrações visuais*

José Paulo Q. Carneiro, **RPM** 27.



## Painel VII

### Valores irracionais de funções trigonométricas

**RPM:** O que segue é uma transcrição adaptada de alguns resultados encontrados no livro *Números: racionais e irracionais*, de I. Niven, SBM, RJ, 1984, que decidimos publicar por julgar do interesse de nossos leitores.

São conhecidas as identidades trigonométricas

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta, \quad \operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta,$$

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a \quad \text{e}$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,$$

as quais, juntamente com a relação fundamental,  $\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1$ , implicam

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta.$$

Fazendo  $\theta = 20^\circ$  na última igualdade, obtemos:



$$\frac{1}{2} = \cos 60^\circ = 4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ.$$

Se escrevemos  $x$  no lugar de  $\cos 20^\circ$ , obtemos a equação

$$8x^3 - 6x - 1 = 0,$$

que por construção tem  $\cos 20^\circ$  como raiz.

Aplicando a essa equação o conhecido resultado sobre raízes racionais de equações polinomiais:

Se  $p/q$ , fração irredutível, é raiz de uma equação com coeficientes inteiros  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ , então  $p$  é divisor de  $a_0$  e  $q$  é divisor de  $a_n$ ,

temos que as únicas possíveis raízes racionais da equação são

$\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$  e  $\pm \frac{1}{8}$ . Mas, substituindo-se na equação, um cálculo

simples mostra que nenhum desses números é raiz; logo, a equação não tem raízes racionais e, portanto,  $\cos 20^\circ$  é um número irracional.

$$\text{Também temos } \cos 20^\circ = \cos^2 10^\circ - \sin^2 10^\circ = 1 - 2\sin^2 10^\circ.$$

Logo, se  $\sin 10^\circ$  fosse racional, então  $1 - 2\sin^2 10^\circ$  seria racional, o que implicaria  $\cos 20^\circ$  racional, o que é uma contradição.

Portanto,  $\sin 10^\circ$  é irracional.

Usando  $\cos 20^\circ = \cos^2 10^\circ - \sin^2 10^\circ = 2\cos^2 10^\circ - 1$ , conclui-se, de modo análogo, que  $\cos 10^\circ$  é também irracional.

Generalizando, temos o resultado:

*Se  $\theta$  for um ângulo tal que  $\cos 2\theta$  é irracional, então  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$  e  $\operatorname{tg} \theta$  são também irracionais.*

A verificação de que  $\cos \theta$  e  $\sin \theta$  são irracionais se faz de modo análogo ao utilizado para  $\theta = 10^\circ$ , usando as igualdades

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2\sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1.$$

Finalmente, se  $\operatorname{tg} \theta$  fosse racional, então  $\operatorname{tg}^2 \theta$  seria racional e de

$$1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta},$$



teríamos  $\cos\theta$  racional e, novamente, concluiríamos que  $\cos 2\theta$  é racional, uma contradição. Portanto,  $\operatorname{tg}\theta$  é irracional.

Com repetidas aplicações do resultado anterior mostra-se que  $\cos\theta$ ,  $\operatorname{sen}\theta$  e  $\operatorname{tg}\theta$  são irracionais, para, por exemplo, os valores de  $\theta$ :

$5^\circ$ ;  $2^\circ 30'$ ;  $1^\circ 15'$ ;  $37'30''$ , etc.

Adaptado do artigo

*Valores irracionais de funções trigonométricas*

Paulo A. da Mata Machado e Aldo Trajano Lourêdo, **RPM** 46.



## Painel VIII

### Mágica com números

Truques de adivinhações aritméticas têm sido apresentados a pessoas e alunos de vários níveis de escolaridade e sempre causam surpresa e fazem muito sucesso. Vamos apresentar o truque da **adivinhação egípcia** com a subsequente exploração das propriedades aritméticas subjacentes a ele.

Nesse truque o apresentador pede a um espectador que pense em um número de 10 a 100. O apresentador segue então os seguintes passos:

1. Pergunta ao espectador se o número é par ou ímpar. Ouvida a resposta, se for par, pede ao espectador que divida o número por 2. Se for ímpar, pede a ele que subtraia 1 e que então divida o resultado por dois.
2. Pergunta se o resultado obtido é par ou ímpar e, ouvida a resposta, pede ao espectador para repetir o procedimento descrito no item 1.
3. O procedimento continua com cada novo resultado até o resultado (quociente de uma divisão por 2) tornar-se igual a 1, quando então os cálculos do espectador terminarão.

Quando o apresentador é informado de que o resultado é igual a 1, ele revela imediatamente ao espectador o número pensado por ele.



### Como funciona o truque da adivinhação egípcia

Suponhamos que o número pensado pelo espectador seja 52. Nas sucessivas etapas, ele efetuará as contas da coluna abaixo à esquerda, enquanto simultaneamente o apresentador irá fazendo, secretamente, as anotações da coluna à direita.

Aluno	Professor
52 (número pensado)	1
26	2
13	4 ✓
6	8
3	16 ✓
1	32 ✓

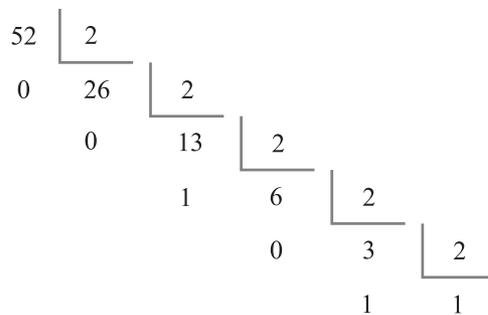
Para cada número ímpar informado pelo espectador, o apresentador anota “✓”. Nos sucessivos estágios da brincadeira, o apresentador marca as potências de 2, iniciando em  $2^0 = 1$ . Em seguida, o apresentador soma as potências de 2 correspondentes às marcas ✓,

$$4 + 16 + 32 = 52,$$

e resgata o número que foi pensado pelo espectador!

O truque foi concebido observando o método das divisões sucessivas por 2, usado para representar um inteiro positivo no sistema binário, isto é, como soma de potências (distintas) de 2, a partir de sua representação no sistema decimal. Nesse método, tomando como exemplo o número 52, fazemos a seguinte “escada” de divisões sucessivas por 2, até atingirmos quociente igual a 1, quando o algoritmo termina.

Lendo da direita para a esquerda os 0's e 1's, que são o último quociente e os restos das divisões, obtemos a representação do número 52 (aqui representado no sistema decimal) no sistema de numeração de base 2:





$$52 = (110100)_2 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \\ = 2^2 + 2^4 + 2^5.$$

Na seqüência das divisões, um resto será 0 quando o dividendo for par, e 1 quando o dividendo for ímpar, daí a importância de tomar nota apenas das potências de 2 correspondentes aos restos ímpares.

O título *adivinhação egípcia* é inspirado nos algoritmos de multiplicação dos antigos egípcios, baseados na decomposição de inteiros positivos como somas de potências distintas de 2.

Adaptado do artigo

*Mágicas com números*

João C. V. Sampaio, **RPM** 60.



## Painel IX

### Destreza ou esperteza?

Certa vez, quando eu tinha 15 anos, um amigo da minha família afirmou que sabia fazer contas mentalmente e com muita rapidez. Para “provar” isso, propôs a seguinte brincadeira:

“Vou escrever um número com sete algarismos. Em seguida, você escreve, abaixo do meu número, outro número com sete algarismos. Repetimos isso mais uma vez, eu escrevo meu terceiro número e, então, eu direi a você, sem fazer cálculos, qual é o valor da soma dos cinco números”.

Eu, um tanto desconfiado, aceitei a proposta, ocorrendo o seguinte:

1º número escrito por ele:	3 574 186
1º número escrito por mim:	1 247 064
2º número escrito por ele:	8 752 935
2º número escrito por mim:	4 955 231
3º número escrito por ele:	<u>5 044 768</u>
Soma fornecida por ele:	23 574 184



Conferi a soma manualmente e constatei que estava correta. Fiquei atônito observando aqueles números por alguns instantes, mas nada consegui concluir. Ele propôs outra conta e novamente acertou o resultado em poucos segundos. Claro que eu sabia (ou desconfiava) que existia algum truque por trás daquilo, mas fiquei por alguns anos sem saber qual era. Vamos agora mostrar que, na realidade, tudo não passa de um pouquinho de álgebra: observe que o segundo e o terceiro números escritos por ele são construídos a partir do anterior, de modo que a soma com o anterior seja igual a 9 999 999. Veja:

1º número escrito por mim + 2º número escrito por ele

$$1\ 247\ 064 + 8\ 752\ 935 = 9\ 999\ 999$$

2º número escrito por mim + 3º número escrito por ele

$$4\ 955\ 231 + 5\ 044\ 768 = 9\ 999\ 999$$

Observe agora que, como  $9\ 999\ 999 = 10\ 000\ 000 - 1$ , a soma total é igual a: primeiro número somado +  $2 \times (10\ 000\ 000 - 1) = 20\ 000\ 000 - 2$ , ou seja,  $(3\ 574\ 186 + 20\ 000\ 000) - 2$ . Para efetuar a soma entre parênteses, observando que o número de zeros em  $20\ 000\ 000$  é igual ao número de dígitos do número inicial, basta acrescentar o dígito 2 na frente do número original, o que resulta em  $23\ 574\ 186$ . Subtraindo 2, obtemos a soma.

Note que, para realizar a última operação, no caso em que o algarismo das unidades do primeiro número é maior do que ou igual a 2, basta subtrair 2 do algarismo das unidades, mantendo os outros dígitos inalterados. Se ele for 0 ou 1, então a subtração é um pouco mais complicada, sendo necessário “emprestar” 1 do algarismo das dezenas para depois subtrair 2. Como  $10 - 2 = 8$ , isso é equivalente a subtrair 1 do algarismo das dezenas e somar 8 ao algarismo das unidades, se esse não for nulo. Se o algarismo das dezenas for nulo, então é preciso emprestar 1 do algarismo das centenas e assim por diante.

Observe que, no caso do desafio proposto pelo amigo de minha família, o número inicial é  $3\ 574\ 186$ . Colocando 2 no início, obtemos  $23\ 574\ 186$ . Subtraindo 2 do algarismo das unidades, obtemos  $23\ 574\ 184$ , que é a soma procurada.



Se alguém o desafiar, você pode tentar dificultar o trabalho para o desafiante dizendo: “Quero ver se você acerta o resultado no caso do primeiro número escrito ter o algarismo das unidades menor que 2, ou seja, igual a 0 ou 1, e o das dezenas nulo”. Isso testará se ele entendeu realmente como funciona o truque, que pode ser adaptado facilmente para o caso de mais dígitos ou para um número maior de somandos. Deixamos para o leitor esse trabalho.

Adaptado do artigo  
*Destreza ou esperteza?*  
Vanderlei Nemitz, **RPM** 64.



## Painel X

### Determinante para fatorar

Há alguns anos, quando ainda existia a União Soviética, submeteu-se aos participantes de uma olimpíada juvenil de Matemática a seguinte questão, aparentemente simples:

$$\text{Fatorar a expressão } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

Mesmo bons professores de Matemática, se não conhecerem algum truque, terão dificuldade em resolver esse problema pelo método direto. Quem duvidar, que o tente.

Entretanto, a teoria dos determinantes dá uma solução fulminante ao problema. Vejamos: seja o determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - abc - abc - abc = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc,$$

exatamente a expressão que desejamos fatorar.

O determinante não se altera se substituirmos, por exemplo, a primeira linha da matriz por sua soma com as duas outras, ou seja



$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a+b+c) & (a+b+c) & (a+b+c) \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} =$$

$$(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc),$$

e o problema foi resolvido.

Muitos realmente são os caminhos da Matemática e precisamos ter a mente aberta e desbloqueada para encontrá-los.

Adaptado do artigo  
*Usando determinantes para fatorar*  
Gilberto Garbi, **RPM** 41.





## Funções interessantes

A aplicação de situações do cotidiano na motivação, estudo e ensino de tópicos de conteúdos programáticos aumenta, na maioria das vezes, o interesse e compreensão dos alunos da educação básica, além de evidenciar que a Matemática faz realmente parte da vida de todos nós. No ensino de funções, que pode ser iniciado já no nível fundamental, as aplicações são muito indicadas para fugir do formalismo teórico. Nessa direção, vou apresentar e estudar alguns aspectos de funções bastante simples que modelam situações reais e comuns.

**I.** Em uma capital brasileira, os preços das corridas de táxi tiveram o seguinte aumento:

- bandeirada: passou de R\$ 3,20 para R\$ 3,50, tendo, portanto, um aumento de aproximadamente 9,3%;
- quilômetro rodado: passou de R\$ 1,80 para R\$ 2,20, tendo, portanto, um aumento de aproximadamente 22,2%.

A determinação da função que fornece o preço de uma corrida já suscita uma discussão interessante. Vários textos didáticos apresentam funções que modelam situações desse tipo como polinomiais de primeiro grau, cujo gráfico é uma reta. No nosso caso seria:

$$P_1(x) = 3,20 + x 1,80 \quad P_2(x) = 3,50 + x 2,20,$$



onde  $P_1(x)$  e  $P_2(x)$  denotam o preço da corrida de  $x$  km antes e depois do aumento, respectivamente.

Essa interpretação pressupõe uma variação contínua no preço da corrida em função dos quilômetros rodados. Mas a realidade não é assim. O taxímetro varia em frações no valor de R\$ 0,30, ou seja, supondo que o carro não pare durante a corrida:

- os valores de  $P_1(x)$  variam  $1,80/0,30 = 6$  vezes durante cada km rodado, o que significa a cada intervalo de rodagem de aproximadamente 166,66 m;
- os valores de  $P_2(x)$  variam  $2,20/0,30 = 7,333\dots$  vezes durante cada km rodado, o que significa a cada intervalo de rodagem de aproximadamente 136,36 m.

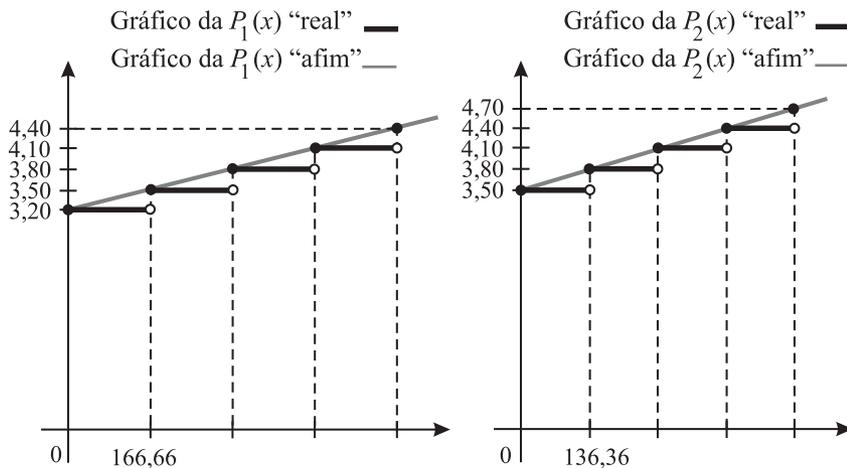
Conversas com taxistas nos fizeram concluir que eles não têm em mente o valor exato do comprimento do trecho percorrido antes de cada mudança no preço, apenas deduzem valores aproximados (recebemos respostas de 200 m, 150 m, etc.); dizem que quem determina o valor exato é o INMETRO ao ajustar os aparelhos dos táxis.

Aqui cabe uma observação interessante: no caso da  $P_1$ , o taxímetro muda um número inteiro de vezes, 6, em cada km rodado, o que não acontece na  $P_2$ , uma vez que 2,20 não é múltiplo de 0,30. Nesse caso, para que o taxímetro mude um número inteiro de vezes, é necessário que

$\frac{2,20}{0,30}x$  seja inteiro, isto é, que  $x$  seja múltiplo de 0,30, sendo  $x$  o

número de km rodados. Isso significa que a “expressão afim” da função  $P_1$  ou  $P_2$  fornece o preço exato de uma corrida de  $x$  km, se  $x$  é, respectivamente, inteiro ou inteiro múltiplo de 3.

Voltemos então às funções,  $P_1$  e  $P_2$  “reais”, que mudam de valor aos saltos, a cada intervalo de 166,66 m ou de 136,36 m. Seus gráficos têm a forma de escada, um exemplo não usual de função. Esboçamos, também, os gráficos das  $P_1$  e  $P_2$  “afins”.



## Perguntas

1. Quais os preços, antigo e depois do aumento, de uma corrida de 3,5 km = 3500 m?

Como  $3500/166,6$  é um valor entre 21 e 22, vemos que o preço antigo é dado pelo 22º "degrau" do gráfico da função  $P_1(x)$ , então  $P_1(3500) = 3,20 + 21 \times 0,30 = 9,50$ , ou seja, o preço é R\$ 9,50. Um cálculo análogo mostra que o preço novo dessa corrida seria R\$ 11,00.

Vamos responder às perguntas a seguir, considerando as aproximações de  $P_1(x)$  e  $P_2(x)$  pelas funções afins anteriormente consideradas. Isso permite estabelecer expressões algébricas simples para as funções envolvidas, além do que os gráficos acima mostram que a função afim é uma aproximação razoavelmente boa.

2. Qual será o aumento percentual no preço de uma corrida de 10 km?

Considerando  $P_1(10) = 3,20 + 10 \times 1,80 = 21,20$  e

$P_2(10) = 3,50 + 10 \times 2,20 = 25,50$ , vemos que o aumento percentual é de 20,28%.

3. Qual é a função que fornece o aumento percentual numa corrida de  $x$  km?

Considerando as funções afins, queremos, em função de  $x$ , o valor de

$p$  tal que  $P_2(x) = P_1(x) + \frac{P}{100} P_1(x)$ , sendo  $P_1(x) = 3,20 + x 1,80$  e



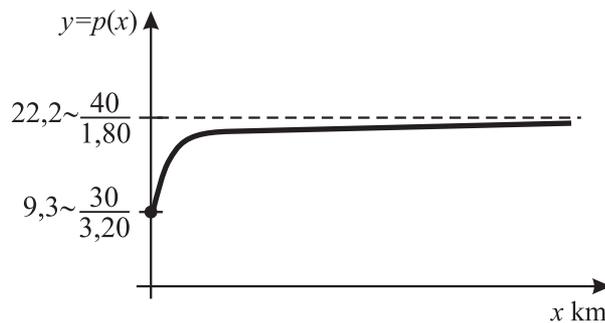
$P_2(x) = 3,50 + x \cdot 2,20$ . Substituindo os valores e fazendo os cálculos,

obtemos  $p(x) = \frac{30 + 40x}{3,20 + 1,80x}$ . Como  $x \geq 0$ , temos que o domínio

dessa função é o intervalo  $[0, +\infty]$ . É interessante observar que, para  $x = 0$ , o aumento é igual a  $30/3,20$ , que é aproximadamente 9,3%, aumento da bandeirada. Para valores de  $x$  muito grandes, observando

que  $p(x) = \frac{\frac{30}{x} + 40}{\frac{3,20}{x} + 1,80}$ , vemos que  $p$  tende para  $p = 40/1,80 =$

22,22222... que é o aumento percentual do km rodado, isto é, para corridas muito grandes, o aumento da bandeirada não conta, valendo apenas o aumento do km rodado. O gráfico da função  $p(x)$ , a seguir, ilustra esse resultado e também evidencia uma peculiaridade dos taxistas: eles não têm como receber aumentos de um percentual fixo.



II. O governo de um Estado brasileiro mudou a contribuição previdenciária de seus contribuintes: de 6% sobre qualquer salário passou para 11% sobre o que excede R\$ 1200,00 nos salários. Por exemplo, sobre um salário de R\$ 1700,00, a contribuição anterior era

$$0,06 \times \text{R}\$1700,00 = \text{R}\$ 102,00 \text{ e a atual é}$$

$$0,11 \times (\text{R}\$ 1700,00 - \text{R}\$ 1200,00) = \text{R}\$ 55,00.$$

Provavelmente os alunos não terão dificuldades em determinar as funções que fornecem o valor das contribuições em função do valor  $x$



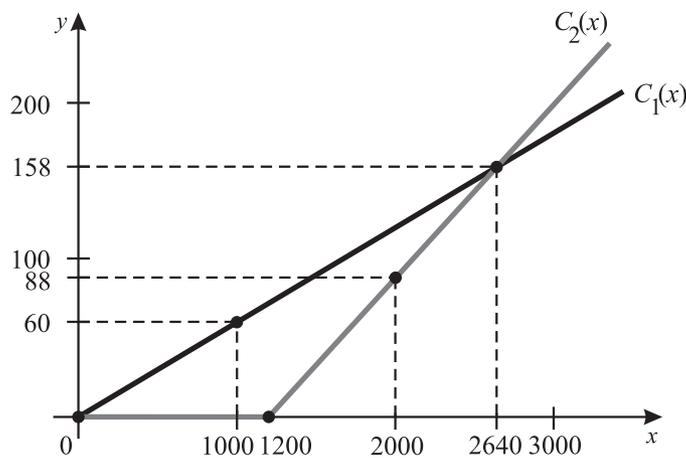
do salário. Sendo  $C_1(x)$  a contribuição anterior e  $C_2(x)$  a atual, temos:

$$C_1(x) = \frac{6}{100}x = 0,06x$$

$$C_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1200 \\ \frac{11}{100}(x-1200) & \text{se } x \geq 1200 \end{cases}$$

Os gráficos dessas funções estão esboçados a seguir e uma análise deles permite tirar várias conclusões, por exemplo:

1. Para um salário de, aproximadamente, R\$ 2700,00, o valor da contribuição permanece o mesmo, por volta de R\$ 160,00. Para obter o valor exato do salário que mantém a contribuição, basta resolver a equação  $0,06x = 0,11(x - 1200)$ , chegando a  $x = 2640$  e  $C_1(2640) = C_2(2640) = 158,40$ .
2. Para salários abaixo de R\$ 2640,00, a contribuição previdenciária diminuiu, pois nesse caso temos, para um mesmo  $x$ ,  $C_2(x)$  menor do que  $C_1(x)$ . Fica interessante fazer simulações com salários e população para calcular os valores das arrecadações antes e depois da mudança da lei, verificando que em determinadas situações, bastante prováveis, a arrecadação estadual diminui consideravelmente.





3.  $C_2(x)$  é maior que  $C_1(x)$  para salários maiores que R\$ 2640,00, logo a nova lei aumenta a contribuição dos salários maiores que esse valor.
4. A inclinação da reta do gráfico de  $C_2(x)$ ,  $x \geq 1200$ , é maior que a da reta de  $C_1(x)$ ; logo, a contribuição, com a nova lei, aumenta mais rapidamente do que antes, à medida que o salário aumenta.

Adaptado do artigo

*Funções interessantes*

Ana Catarina P. Hellmeister, **RPM** 63.

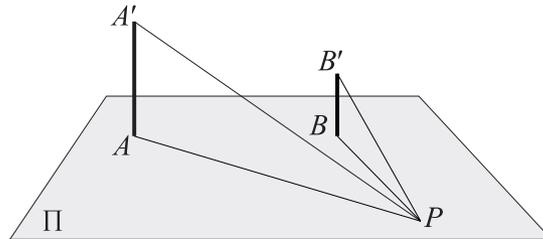




## A formiga inteligente

### Um problema

Imagine dois postes verticais  $AA'$  e  $BB'$  de tamanhos diferentes no plano horizontal  $\Pi$ . Para que posições uma formiga  $P$ , no plano, vê os dois postes do mesmo tamanho?

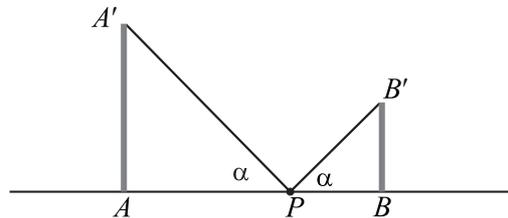


Em primeiro lugar, devemos pensar o que ocorre quando vemos dois objetos com o mesmo tamanho. Por exemplo, uma moedinha de 1 centavo segura entre os dedos com o braço esticado tem, aparentemente, o mesmo tamanho da lua cheia. A conclusão é a seguinte: dois objetos aparentam ter o mesmo tamanho para certo observador, quando os ângulos de visada são iguais. Portanto, observando a figura acima, a formiga vê os postes  $AA'$  e  $BB'$  do mesmo tamanho se os ângulos de visada  $APA'$  e  $BPB'$  forem iguais.

Mesmo sem pensar ainda como resolver o problema, a formiga inteligente pode verificar que existem dois

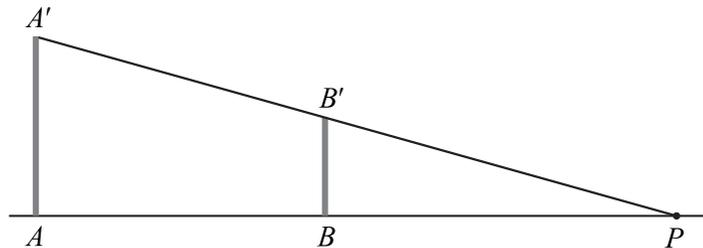


lugares onde isso acontece, ambos na reta  $AB$ . Andando na reta  $AB$ , de  $A$  para  $B$ , certamente encontraremos um ponto interior ao segmento  $AB$ , onde  $\angle APA' = \angle BPB'$ , como mostra a figura.



Se o poste  $A$  for maior que o poste  $B$ , esse ponto  $P$  estará obviamente mais próximo de  $B$  do que de  $A$  e, para obter exatamente a posição de  $P$ , basta ligar o ponto  $A'$  ao simétrico de  $B'$  em relação à reta  $AB$ .

Por outro lado, uma segunda posição para  $P$  é a interseção da reta  $AB$  com a reta  $A'B'$ . A figura a seguir mostra uma outra posição de  $P$ , onde  $\angle APA' = \angle BPB'$ .



Além dessas duas posições determinadas intuitivamente, existe certamente uma infinidade de outras, no plano, mas fora da reta  $AB$ . Já sabemos que os ângulos de visada  $APA'$  e  $BPB'$  são iguais para que a formiga veja os dois postes do mesmo tamanho. Porém, como os postes são verticais, isso significa que os triângulos  $APA'$  e  $BPB'$  são semelhantes. Portanto,  $\frac{PA}{PB} = \frac{AA'}{BB'}$  que é constante, pois é a razão entre os comprimentos dos dois postes (veja novamente a primeira figura).

Temos então dois pontos fixos  $A$  e  $B$  no plano e buscamos o lugar geométrico dos pontos cuja razão das distâncias a esses pontos é constante e igual à razão entre os comprimentos dos postes.



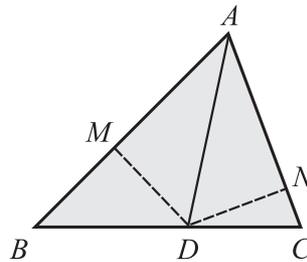
Antes de resolver o problema, é interessante recordar o “teorema das bissetrizes”:

*Uma bissetriz de um ângulo de um triângulo divide o lado oposto na mesma razão dos lados adjacentes.*

Veja a seguir uma demonstração desse importante teorema.

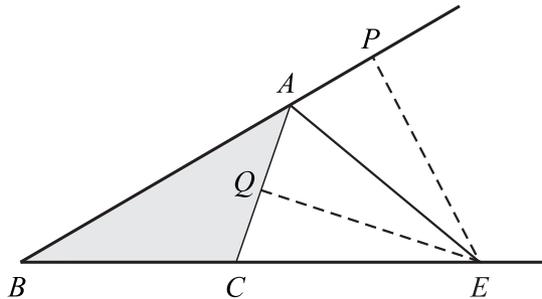
a) Na figura abaixo,  $AD$  é bissetriz interna do ângulo  $A$  do  $\Delta ABC$ .

Traçando por  $D$  as perpendiculares  $DM$  e  $DN$  aos lados  $AB$  e  $AC$ , temos que  $DM = DN$ , pois o ponto  $D$  está na bissetriz do ângulo  $A$ . Por outro lado, como os triângulos  $ADB$  e  $ADC$  têm mesma altura a partir de  $A$ , então a razão entre suas áreas,  $\mathcal{A}$ , é igual à razão entre suas bases, ou seja,



$$\frac{DB}{DC} = \frac{\mathcal{A}(ADB)}{\mathcal{A}(ADC)} = \frac{(AB \cdot DM) / 2}{(AC \cdot DN) / 2} = \frac{AB}{AC}.$$

b) Na figura a seguir,  $AE$  é bissetriz externa do ângulo  $A$  do  $\Delta ABC$ .



Traçando por  $E$  as perpendiculares  $EP$  e  $EQ$  às retas  $AB$  e  $AC$ , temos que  $EP = EQ$ , pois o ponto  $D$  está na bissetriz do ângulo externo  $A$ . Por outro lado, como os triângulos  $AEB$  e  $AEC$  têm mesma altura a partir de  $A$ , então a razão entre suas áreas,  $\mathcal{A}$ , é igual à razão entre suas bases, ou seja,

$$\frac{EB}{EC} = \frac{\mathcal{A}(AEB)}{\mathcal{A}(AEC)} = \frac{(AB \cdot EP) / 2}{(AC \cdot EQ) / 2} = \frac{AB}{AC}.$$



Demonstrado o teorema das bissetrizes, é importante lembrar que vale a sua recíproca, ou seja, se  $D$  é um ponto da base  $BC$  do  $\triangle ABC$  e  $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ , então  $AD$  é bissetriz interna do ângulo  $A$  e, se  $E$  é um ponto do prolongamento de  $BC$  e  $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$ , então  $AE$  é bissetriz externa.

### A circunferência de Apolônio

Passamos agora a analisar o problema seguinte:

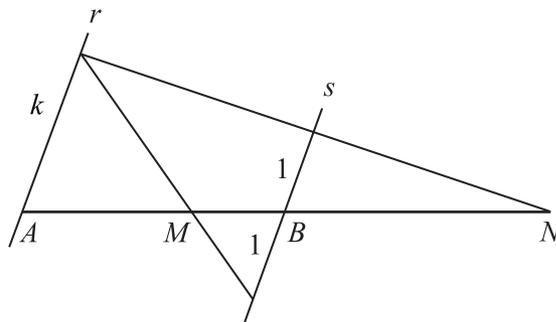
Dados dois pontos  $A$  e  $B$  no plano e um número  $k > 0$ , determinar o lugar geométrico do ponto  $P$  tal que  $\frac{PA}{PB} = k$ .

Em primeiro lugar, se  $k = 1$ , temos  $PA = PB$  e o lugar geométrico de  $P$  é naturalmente a mediatriz de  $AB$ .

Em seguida, vamos imaginar  $k > 1$  (o caso  $0 < k < 1$  é inteiramente análogo). Como já vimos antes, podemos encontrar com alguma facilidade dois pontos da reta  $AB$  que possuem a propriedade desejada.

Sejam portanto  $M$  e  $N$  pontos da reta  $AB$  tais que  $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k$ .

Observe então a figura a seguir em que as retas  $r$  e  $s$  são paralelas.



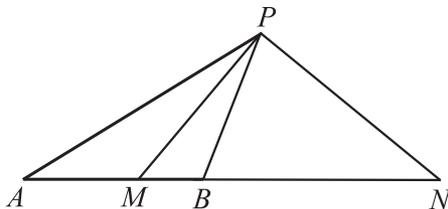
Sabemos que, dado um segmento unitário, para cada real positivo  $k$  existe um segmento de comprimento  $k$  e a semelhança de triângulos



permite concluir que, na figura acima, temos  $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k$ . Atenção: a figura acima mostra que os pontos  $M$  e  $N$  existem, mas a construção com régua e compasso só é possível se  $k$  é construtível (racionais, por exemplo, são construtíveis). Na situação acima, dizemos que os pontos  $M$  e  $N$  dividem harmonicamente o segmento  $AB$ .

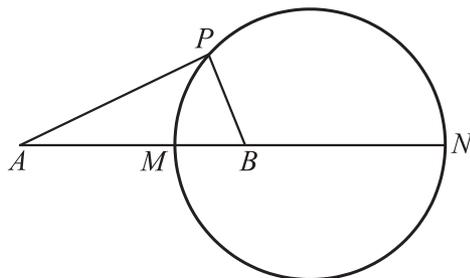
Vamos agora considerar um ponto  $P$  fora da reta  $AB$  tal que  $\frac{PA}{PB} = k$  e investigar seu lugar geométrico.

Observe a figura a seguir.



Como  $\frac{MA}{MB} = \frac{PA}{PB}$ , então  $PM$  é bissetriz interna do ângulo  $APB$  e

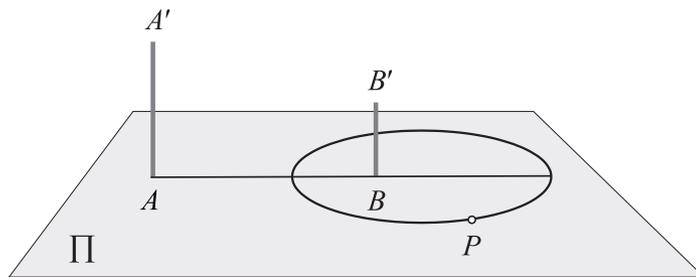
como  $\frac{NA}{NB} = \frac{PA}{PB}$ , então  $PN$  é bissetriz externa. Mas essas bissetrizes são perpendiculares (verifique!) e, como  $M$  e  $N$  são fixos, o lugar geométrico de  $P$  é a circunferência de diâmetro  $MN$ .



Essa circunferência chama-se *circunferência de Apolônio do segmento  $AB$  na razão  $k$* . Ela é o lugar geométrico dos pontos cuja razão das distâncias a dois pontos fixos é igual a uma constante dada.



O problema da formiga está resolvido. O lugar geométrico dos pontos de onde a formiga vê os postes de mesmo tamanho é a circunferência de Apolônio do segmento  $AB$  na razão  $AA'/BB'$ .



### Nota

Apolônio de Perga viveu no século 3 a.C. Foi célebre geômetra e astrônomo, mas a maior parte de sua vasta obra desapareceu. Felizmente, a sua obra-prima – *As Cônicas* – foi quase toda preservada. Entretanto, são conhecidos os títulos e conteúdos dos muitos tratados que escreveu devido a relatos de matemáticos posteriores. Sabemos por isso que Apolônio escreveu um livro chamado *Lugares Planos* dedicado à análise de diversos lugares geométricos e que um deles era justamente o lugar geométrico dos pontos cuja razão das distâncias a dois pontos fixos é constante. Esse lugar geométrico ficou conhecido até hoje como *Circunferência de Apolônio*, um tanto injustamente, pois Aristóteles já o tinha descoberto anos antes.

Adaptado do artigo

*A formiga inteligente*

Eduardo Wagner, **RPM** 61.



## A demonstração feita por Heron

Quando pequeno, li sobre Heron de Alexandria em uma enciclopédia biográfica que havia em casa. Fiquei sabendo que ele viveu no século II d.C. na cidade de Alexandria (obviamente), que foi engenheiro e matemático. Não me lembro que outras coisas mais havia sobre Heron, mas ficou gravada em minha memória a fórmula que l  estava para calcular a área de um triângulo:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

sendo  $p$  a metade do perímetro do triângulo.

O que me encantou nessa fórmula? Não sei. Talvez por ter uma raiz quadrada, que naqueles dias escolares lhe dava um ar de Matemática superior; ou pelo fato de s  usar os lados do triângulo, e não a altura, como na *formulinha* usada na escola.

Anos mais tarde, após ter encontrado várias vezes a fórmula e até depois de ter visto sua demonstra o como mero corolário de um cálculo de medianas, continuava intrigado: como Heron a havia demonstrado?

Este ano comprei o livro *Introdu o   História da Matemática*, de Howard Eves, e qual não foi minha surpresa ao encontrar no livro a men o de que, a **demonstra o feita por Heron** (que está em seu livro *A*



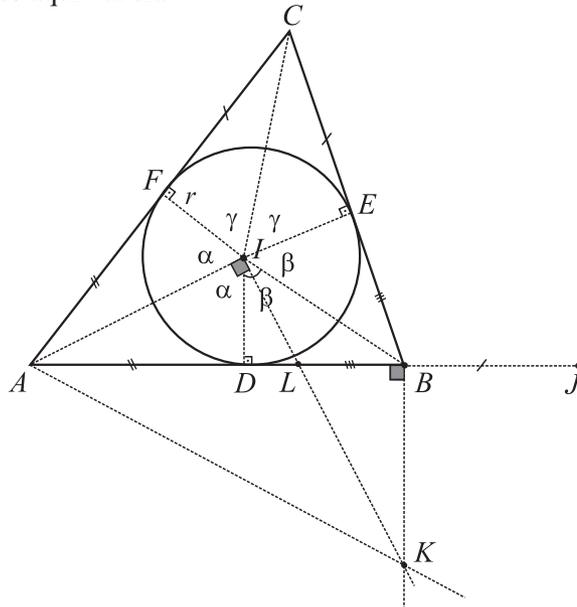
*métrica*) estava esquematizada num dos exercícios do livro. Com algumas pequenas modificações aqui vai ela:

$$BC = a$$

$$AC = b$$

$$AB = c$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$



1. área  $\Delta ABC = \text{área } \Delta ABI + \text{área } \Delta IBC + \text{área } \Delta AIC =$

$$\frac{r}{2}(AB + BC + CA) = rp, \text{ sendo } r \text{ o raio da circunferência inscrita.}$$

2. Como  $\Delta ADI \cong \Delta AIF$ ,  $\Delta DBI \cong \Delta IBE$  e  $\Delta FIC \cong \Delta IEC$ , temos  
 $AD = AF$ ,  $DB = BE$  e  $CE = CF$ .

3. Seja  $J$  o ponto da semi-reta  $AB$  tal que  $BJ = CE$ .

$$AJ = \frac{AD + AF}{2} + \frac{BD + BE}{2} + \frac{CE + CF}{2} = \frac{AB + BC + CA}{2} = p.$$

Então

$$p - c = AJ - AB = BJ; \quad p - b = AJ - AC = DB \text{ e}$$

$$p - a = AJ - BC = AD.$$

- 4.

i) Seja  $K$  o ponto construído como indicado na figura. O quadrilátero  $AKBI$  é inscrito numa circunferência de diâmetro  $AK$ ; logo  $\angle AIB + \angle AKB = 180^\circ$  e, como  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ , temos  $\angle AIB + \angle CIE = 180^\circ$ , de onde  $\angle AKB = \angle CIE = \gamma$ .



Então temos  $\triangle CIE \approx \triangle AKB$ , o que implica  $\frac{AB}{BK} = \frac{CE}{r} = \frac{BJ}{r}$ .

ii) No triângulo retângulo  $\triangle ALI$  temos  $r^2 = DL \cdot AD$  e de  $\triangle DLI \approx \triangle BLK$  (verifique) temos  $\frac{BK}{LB} = \frac{r}{DL}$ .

iii) De i) e ii) temos  $\frac{AB}{BJ} = \frac{LB}{DL}$ , o que implica  $\frac{AB + BJ}{BJ} = \frac{LB + DL}{DL}$

ou  $\frac{AJ}{BJ} \cdot \frac{AJ}{AJ} = \frac{DB}{DL} \cdot \frac{AD}{AD}$ , que juntamente com  $r^2 = DL \cdot AD$  leva a  $AJ^2 \cdot r^2 = BJ \cdot AJ \cdot BD \cdot AD$ .

Usando-se as igualdades apresentadas em **3**, obtemos

$$p^2 r^2 = (p - c)p(p - b)(p - a),$$

que, pela igualdade exibida em **1**, demonstra a fórmula.

Adaptado do artigo

*A demonstração feita por Heron*

Mário Dalcin, **RPM** 36.



## A Matemática da folha de papel A4

### Introdução

O formato do papel que usamos rotineiramente nos serviços de impressão ou fotocópia possui uma história fascinante e repleta de Matemática. Neste artigo, compartilho com o leitor algumas idéias que estão por trás dessa história.

### A intrigante folha de papel A4

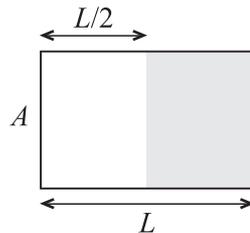
O formato de papel mais usado para impressões e fotocópias, que recebe a denominação A4, tem 210 milímetros de altura por 297 milímetros de largura. Diferentemente do que se possa imaginar, a razão  $297/210$  não é a razão áurea (ver artigo *Retângulo áureo, divisão áurea e sequênci de Fibonacci*). Analisaremos, a seguir, de onde vem essas estranhas medidas.

Inicialmente padronizaremos neste artigo que as palavras *largura* e *altura* sempre serão usadas como referência ao maior e ao menor lado de um retângulo, respectivamente.

Imagine-se tendo que resolver o seguinte problema: qual deve ser a largura e a altura de uma folha retangular de modo que, quando ela for dividida ao meio, os dois novos retângulos obtidos mantenham a razão entre altura e largura da folha original?



O problema é de solução simples, como se vê a seguir:



$$\frac{L}{A} = \frac{A}{\frac{L}{2}} \rightarrow L^2 = 2A^2 \rightarrow L = \sqrt{2}A$$

Portanto, a folha retangular com razão  $L/A$  igual a  $\sqrt{2}$  é a única que, quando dividida ao meio, conforme processo descrito, resultará em retângulos semelhantes ao da folha original. Lembramos que de forma diferente dos triângulos, onde bastam ângulos congruentes para que sejam figuras semelhantes, no caso dos quadriláteros a semelhança só se garante se os ângulos forem congruentes e se a razão entre os lados das figuras for preservada. No caso das medidas de uma folha A4, note que  $297/210$  é uma ótima aproximação racional para  $\sqrt{2}$ , com erro muito pequeno, da ordem de centésimo de milésimo.

A classificação de papéis da qual A4 faz parte chama-se série A, que começa com o A0 e vai até o A10. Essas folhas têm em comum a razão  $\sqrt{2}$  entre largura e altura. A série começa com uma folha retangular de área  $1 \text{ m}^2$ , definida como A0. A partir dela obtemos a folha do formato seguinte, A1, dividindo-se A0 ao meio. As dimensões da folha A0, em metros, podem ser obtidas a partir da solução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} L = \sqrt{2}A \\ LA = 1 \end{cases} \rightarrow A = \frac{\sqrt[4]{8}}{2} \text{ e } L = \sqrt[4]{2} \text{ ou } A = 2^{-\frac{1}{4}} \text{ e } L = 2^{\frac{1}{4}}.$$

Passando essas medidas para milímetros, e aproximando para o milímetro mais próximo, encontramos as dimensões da folha A0, que são 841 mm de altura por 1189 mm de largura.

Façamos agora os cálculos da folha A1, que é obtida a partir da divisão ao meio da folha A0:



$$\begin{cases} L = \sqrt{2}A \\ LA = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow A = 2^{-\frac{3}{4}} \text{ e } L = 2^{-\frac{1}{4}}.$$

Adota-se, nesse caso, a aproximação 594 mm por 841 mm.

Dividindo-se A1 ao meio, obtemos A2, que dividida ao meio resultará A3, e assim por diante até A10. Pode-se verificar de maneira simples que a altura e a largura de uma folha  $A(k)$ , em metros, serão

dadas, respectivamente, por  $2^{-\frac{1+2k}{4}}$  e  $2^{-\frac{1-2k}{4}}$ . Para o caso da folha A4, aplicando  $k = 4$  na fórmula, obtemos os “misteriosos” valores padronizados do formato, que são 210 mm por 297 mm.

### Qual a vantagem da proporção 1: $\sqrt{2}$ ?

A literatura sobre artes gráficas cita dois aspectos importantes sobre a conveniência do uso de uma folha retangular de razão  $1:\sqrt{2}$ . As páginas de um livro são impressas em uma folha de máquina de grande formato. Nela são feitas dobras e cortes e, a partir disso, são montados os cadernos que, juntos, compõem o livro. Normalmente as dobras são feitas “ao meio”, fazendo com que o número de páginas seja uma potência de 2. Se o papel for dobrado ao meio por uma dobra, resultará em 2 folhas (chamado *in-fólio*) que, quando impressas frente e verso, constituirão 4 páginas do livro. Se essa última folha for novamente dobrada ao meio, agora com dobras cruzadas, resultará em 4 folhas (*in-quarto*), ou seja, 8 páginas de livro. Com uma nova dobra teremos o *in-oitavo*: 3 dobras, 8 folhas e 16 páginas de livro; e assim sucessivamente.

Uma vez que cada formato deriva do seu precedente fazendo uma dobra sobre o maior lado do retângulo, a razão inicial  $1:\sqrt{2}$  sempre será mantida em todas as páginas do livro, seja qual for o número de dobras feitas na composição. Outros formatos não permitiriam isso como, por exemplo, um retângulo de razão 3:4 (também usado na confecção de livros) que obedece a um padrão de alternância no decorrer das sucessivas dobras. A primeira dobra gera retângulos de razão 2:3; a



segunda gera retângulos 3:4, a terceira retângulos 2:3, e assim sucessivamente. Deixo por conta do leitor a demonstração do resultado: dada

a razão  $x:y$ , se  $\frac{y}{2} \leq x$ , então as razões se alternam entre  $x:y$  e  $y:2x$  no

decorrer das sucessivas dobras que dividem o lado maior do retângulo ao meio (obs.: o único caso em que não há alternância será quando

$\frac{x}{y} = \frac{y}{2x}$ , que é justamente o caso em que temos a razão  $1:\sqrt{2}$ ).

Vale citar que nem todos os estudiosos de composição em artes gráficas estão de acordo sobre a relevância da vantagem que acabamos de descrever da razão  $1:\sqrt{2}$  sobre outras razões. Para um bom acabamento final das dobras de um livro recomenda-se que as dobras sejam feitas paralelamente às fibras do papel. Com isso, folhas de papel que, em virtude da direção das fibras, são adequadas ao *in-quarto* não poderiam ser usadas para livros *in-oitavo* porque a fibra correria em direção errada. Portanto, a vantagem da razão preservada em  $1:\sqrt{2}$  após as dobras fica comprometida quando levamos em consideração a direção das fibras [1].

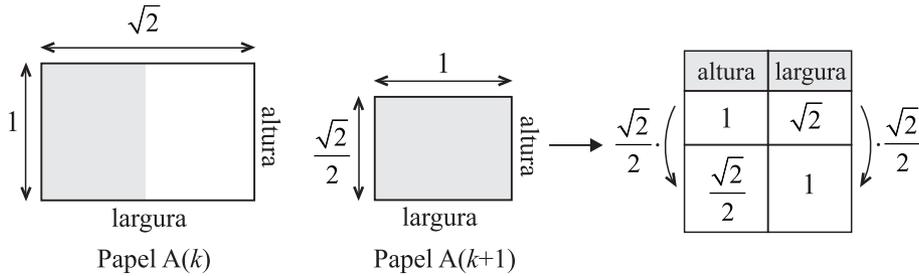
Outra vantagem que os papéis de razão  $1:\sqrt{2}$  da série A apresentam – e essa aceita por todos os especialistas – é a de que evitam o desperdício de papel nos trabalhos de fotocópias.

Imagine que você queira copiar duas folhas quadradas, juntas, em uma nova folha quadrada. Essa tarefa não pode ser realizada sem o desperdício de papel. Se os quadrados têm lado 10 cm, lado a lado formarão um retângulo de 10 por 20 cm, o que exigirá uma folha quadrada de 20 por 20 cm para que o serviço seja feito. Nesse caso, haverá desperdício de metade da folha. O mesmo não ocorre, por exemplo, com duas folhas A4 lado a lado, que podem ser copiadas, sem desperdício de papel, em uma folha A3.

Se você observar com atenção, as fotocopiadoras que fazem ampliação e redução a partir das folhas da série A possuem alguns comandos pré-definidos, como, por exemplo, os de redução de 71%, 50%, 35%, 25%, 18% e 12,5%.



Você já se perguntou de onde vêm essas estranhas porcentagens? Responderemos essa pergunta calculando qual deve ser o fator de redução usado na altura e na largura de uma folha  $A(k)$  para que ela seja reduzida a uma folha  $A(k+1)$ :



Como  $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$ , uma redução de 71% fará o serviço desejado. As demais reduções indicadas referem-se, respectivamente, às reduções de  $A(k)$  para  $A(k+2)$ ,  $A(k+3)$ ,  $A(k+4)$ ,  $A(k+5)$  e  $A(k+6)$ .

### Outros formatos de papel: as séries B e C

Há registros do uso da razão  $1:\sqrt{2}$  durante a Alta Idade Média, quando muitos livros eram escritos em duas colunas. Gutenberg (1398-1468), porém, preferia para suas páginas a razão 2:3, e, durante a Renascença, raramente se produziu livro na razão  $1:\sqrt{2}$ .

A idéia de se padronizar um formato de papel surge no século XX, e tem a ver com aspectos relacionados à praticidade e economia. Com o uso generalizado de um formato padrão de papel – o que se reflete diretamente na padronização dos formatos de livros, revistas, jornais, envelopes –, as bibliotecas podem planejar de forma mais eficiente as alturas de suas prateleiras, as gráficas podem trabalhar com ajustes de máquina pré-definidos, as fotocopiadoras e impressoras podem padronizar programas para redução e ampliação, etc.

O padrão internacional para o tamanho de papéis é o ISO 216 (*International Organization for Standardization*, norma 216), que é adotado por todos os países industrializados do mundo, exceto EUA, Canadá e partes do México. Essa norma regulamenta o formato de algumas séries básicas de papel, como as séries A, B e C. As séries B



e C destinam-se, entre outras aplicações, aos formatos de envelopes que podem ser usados para conter folhas da série A. O formato de uma folha  $B(k)$  é definido como a média geométrica entre  $A(k)$  e  $A(k-1)$ , e o da folha  $C(k)$  como a média geométrica entre  $A(k)$  e  $B(k)$ . Usando a fórmula que vimos anteriormente para altura de uma folha  $A(k)$ , as fórmulas de cálculo da altura das folhas  $B(k)$  e  $C(k)$  serão:

$$B(k) = \sqrt{A(k)A(k-1)} = \sqrt{2^{\frac{1+2k}{4} - \frac{1+2(k-1)}{4}}} = \sqrt{2^{-k}} = 2^{-\frac{k}{2}}$$

$$C(k) = \sqrt{A(k)B(k)} = \sqrt{2^{\frac{1+2k}{4} - \frac{k}{2}}} = \sqrt{2^{\frac{1+4k}{4}}} = 2^{\frac{1+4k}{8}}$$

Ficam a cargo do leitor a formulação de  $B(k)$  e  $C(k)$  para a largura das folhas dessas duas séries, bem como a demonstração de que também nas séries B e C a razão  $1:\sqrt{2}$  se preserva.

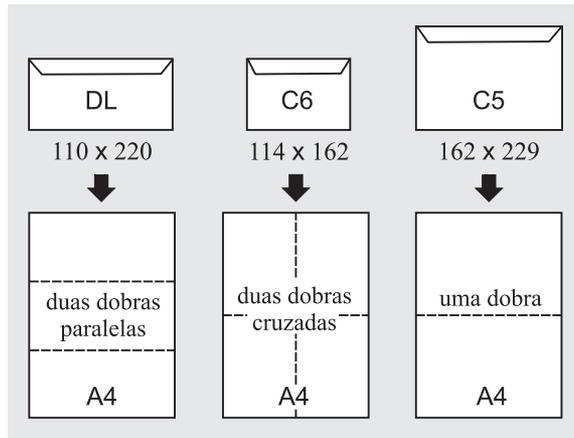
Seja qual for o número  $k$  da série, sempre teremos, tanto para a altura quanto para a largura, a relação  $A(k) < C(k) < B(k)$ . Verificaremos tal fato para a altura, cujos dados já foram calculados anteriormente:

$$2^{-\frac{1+2k}{4}} < 2^{-\frac{1+4k}{8}} < 2^{-\frac{k}{2}} \Leftrightarrow -\frac{2+4k}{8} < -\frac{1+4k}{8} < -\frac{4k}{8} \Leftrightarrow -2 < -1 < 0,$$

para qualquer  $k$ .

Demonstração análoga pode ser feita entre as larguras das três séries.

Os formatos das séries B e C são maiores que os da série A e, por esse motivo, são usados nos envelopes que deverão conter folhas da série A. Como  $A(k) < C(k) < B(k)$ , se queremos enviar pelo correio um documento com poucas folhas A4, devemos usar um envelope C4, porém, se a quantidade de folhas for muito grande, é provável que elas fiquem melhor acomodadas em um envelope B4. Se você quiser enviar uma folha A4 dobrada uma única vez, recomenda-se um envelope C5. Para uma folha A4 com duas dobras cruzadas, o envelope ideal é o C6 e, se as duas dobras forem paralelas, o envelope ideal é o DL (ilustrado na figura a seguir).



Adaptado do artigo

*A Matemática da folha de papel A4*

José Luiz Pastore Mello, **RPM** 66.





## Retângulo áureo, divisão áurea e sequência de Fibonacci

### O retângulo áureo

Chama-se *retângulo áureo* qualquer retângulo  $ABCD$  (figura 1) com a seguinte propriedade: se dele supirmos um quadrado, como  $ABFE$ , o retângulo restante,  $CDEF$ , será semelhante ao retângulo original.

Se  $a + b$  e  $a$  são os comprimentos dos lados do retângulo original a definição acima se

traduz na relação  $\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$ . (1)

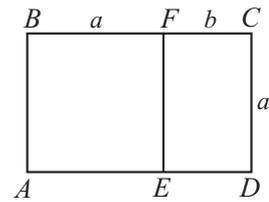


figura 1

Como veremos logo adiante, esse tipo de retângulo tem muitas propriedades interessantes que justificam o qualificativo “áureo”. Ele tem sido considerado por

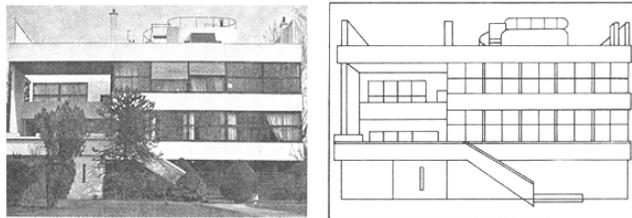


figura 2

arquitetos e artistas como o retângulo mais bem proporcionado e de grande valor estético. A figura 2



reproduz a foto de uma residência suburbana de Paris, projetada pelo famoso arquiteto Le Corbusier, na qual ele utiliza o retângulo áureo. Há aí dois retângulos áureos, um deles representado pelo corpo inteiro da casa e o outro, disposto verticalmente, representado pela parte da casa à esquerda da escada.



figura 3

O Partenon (figura 3), ou templo da deusa Atena, uma das mais admiradas obras da arquitetura universal, revela, em seu frontispício (figura 4) um quase exato retângulo áureo. Todavia não há evidência histórica de que, ao construir o templo no 5º século a.C., os arquiteto de Péricles tenham conscientemente usado o retângulo áureo.



figura 4

Voltemos à relação (1). Dela decorre, por uma propriedade bem conhecida das proporções, que:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a} = \frac{a-b}{(a+b)-a} \quad \text{ou seja} \quad \frac{b}{a} = \frac{a-b}{b}.$$

Isto significa que se o retângulo de lados  $a + b$  e  $a$  é áureo, então também o é o retângulo de lados  $a$  e  $b$ .

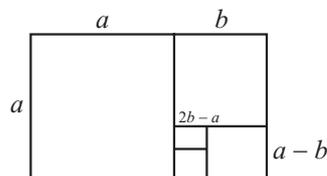


figura 5



Evidentemente o mesmo raciocínio se aplica para mostrar que também são áureos os retângulos de lados  $b$  e  $a - b$ ,  $a - b$  e  $2b - a$ , etc. (figura 5). Em outras palavras, dados os números positivos  $a$  e  $b$ , satisfazendo a relação (1), formemos a seqüência  $a + b$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $a - b$ ,  $2b - a$ ,  $2a - 3b$ ,  $5b - 3a$ ,  $5a - 8b$ ,  $13b - 8a$ , ... (2)

Sendo, a partir do terceiro,  $a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$ .

O raciocínio anterior estabelece que quaisquer dois elementos consecutivos dessa seqüência são os lados de um retângulo áureo. Portanto, o processo anterior de retirar quadrados de retângulos áureos conduz a uma seqüência infinita de retângulos áureos, com dimensões cada vez menores.

A figura também sugere que a seqüência (2) tende a zero, e isso é verdade porque as dimensões de cada retângulo da seqüência podem ser obtidas multiplicando as dimensões correspondentes do retângulo anterior por  $b/a$ , que é menor que 1; ora, o termo geral de uma progressão geométrica de razão menor do que 1 tende a zero quando o número de termos tende a infinito. Deve ser notado que o símbolo da Sociedade Brasileira de Matemática utiliza a mencionada sucessão de retângulos áureos, unidas por quadrantes de circunferências.



Os lados de um retângulo áureo são grandezas incomensuráveis. (Veja a definição desse e de outros conceitos correlatos no artigo *Grandezas Incomensuráveis*, desta apostila.) De fato, se fossem comensuráveis, teriam um submúltiplo comum  $s$ , e, com referência à figura 1,

$$AD = (a + b)s \text{ e } AB = as,$$

onde  $a$  e  $b$  seriam então números inteiros. Em consequência, todos os números da seqüência (2) seriam inteiros e positivos. Isso é um absurdo, pois não existe seqüência infinita e decrescente de números inteiros positivos (*Princípio da Descida Infinita de Fermat*). Concluimos, então, que os lados de um retângulo áureo são incomensuráveis.



### A divisão áurea

O retângulo áureo está intimamente ligado com a chamada *divisão áurea* de um segmento, ou divisão em *média e extrema razão*, que introduziremos a seguir.

Diz-se que um ponto  $C$  de um segmento  $AB$  (figura 6) divide esse segmento em média e extrema razão se  $\frac{AC}{AB} = \frac{CB}{AC}$ . (3)

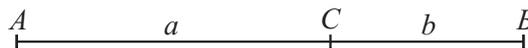


figura 6

A relação (3) é precisamente a relação (1) se pusermos  $AC = a$  e  $CB = b$ , de sorte que os segmentos  $AC$  e  $CB$  da divisão áurea (ou  $AB = a + b$  e  $AC = a$ ) são os lados de um retângulo áureo.

É interessante notar que se  $C_1$  divide  $AB$  em média e extrema razão, e se marcarmos no segmento  $AB$  os pontos  $C_2, C_3, C_4, \dots$  de tal maneira que  $AC_2 = C_1B$ ,  $AC_3 = C_2C_1$ ,  $AC_4 = C_3C_2, \dots$  (figura 7), então  $C_n$  divide  $AC_{n-1}$  em média e extrema razão  $n = 2, 3, 4, \dots$ . Esse resultado segue facilmente do que já provamos antes sobre a sequência infinita de retângulos áureos, donde segue também que os segmentos  $AC_1$  e  $C_1B$  da divisão áurea de  $AB$  são incomensuráveis. Sugerimos que o leitor faça uma demonstração completa destes resultados.

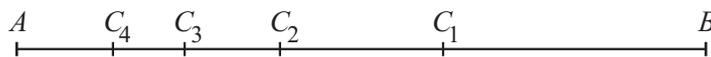


figura 7

Como já observamos há pouco, as relações (1) e (3) são idênticas quando pomos  $AC = a$  e  $CB = b$ . Delas segue-se que

$$b^2 + ab = a^2. \quad (4)$$

O número  $m = b/a$  é conhecido como a *razão áurea*. Dividindo a equação anterior por  $a^2$  obtemos:  $m^2 + m = 1$ . (5)

A raiz positiva dessa equação do segundo grau é:

$$M = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cong 0,618. \quad (6)$$



A razão áurea, como foi definida, é a razão entre o menor e o maior lados de um retângulo áureo. Deve ser observado que muitos autores usam como razão áurea (ou número áureo) o seu inverso  $u$ , que é a razão entre o maior e o menor lados de um retângulo áureo:

$$u = \frac{1}{m} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \cong 1,618.$$

O número  $u$  é a raiz positiva da equação  $u^2 = u + 1$ .

Entre estes dois números, existem as relações:  $u = 1 + m$  e  $mu = 1$ .

### Construções geométricas

Vamos construir um retângulo áureo a partir de seu menor lado  $AE = a$  (figura 8). Para isso construímos  $EF = AE$  perpendicularmente a  $AE$ . Com centro em  $G$ , ponto médio do segmento  $AE$ , traçamos o

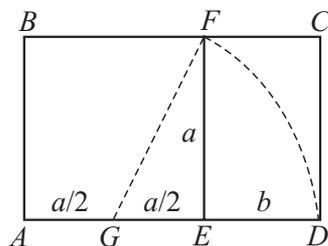


figura 8

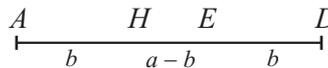


figura 9

arco  $\widehat{FD}$ , com  $D$  na reta  $AE$  e  $E$  é interno ao segmento  $AD$ . Como  $GF = GD = b + a/2$ , o teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo  $GEF$  nos dá:

$$\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Simplificando, obtemos daqui a relação (4) que, como vimos, equivale à relação (1). Logo  $ABCD$  é um retângulo áureo.

Se o problema fosse dividir o segmento  $AE = EF$  em média e extrema razão, bastaria completar a construção anterior marcando, no segmento  $AE$ , o ponto  $H$  tal que  $AH = b$  (figura 9).



### A sequência de Fibonacci e a razão áurea

É surpreendente que a razão áurea esteja intimamente relacionada com a chamada *sequência de Fibonacci*, como veremos a seguir, pois aparentemente uma coisa nada tem a ver com a outra.

Leonardo de Pisa, muito conhecido como Fibonacci (filho de Bonaccio), viveu no período de aproximadamente 1170 a 1250. Ele foi educado na África e viajou muito pela Europa e Ásia Menor. Tornou-se famoso por conhecer muito bem toda a Matemática então acumulada. Em 1202 ele publicou o *Liber Abaci*, ou Livro do Cálculo, que teve importância decisiva na tarefa de tornar conhecida na Europa a Matemática dos árabes e hindus. Foi esse livro que popularizou no Ocidente o uso dos algarismos arábicos e os métodos hindus de cálculo com números inteiros, frações e raízes.

A seqüência de Fibonacci aparece num dos problemas tratados no *Liber Abaci* e que consiste no seguinte:

*Um casal de coelhos torna-se produtivo após dois meses de vida e, a partir de então, produz um novo casal a cada mês. Começando com um único casal de coelhos recém-nascidos, quantos casais existirão ao final de um ano?*

Vamos designar com  $f_n$  o número de casais de coelhos existentes após  $n$  meses. Evidentemente,  $f_0 = f_1 = 1$ . Por outro lado, o número de casais existentes no  $n$ -ésimo mês,  $f_n$ , é igual ao número existente um mês antes,  $f_{n-1}$ , mais o número de nascimentos novos. Ora, esse número é precisamente o número de casais existentes há dois meses,  $f_{n-2}$ , que têm pelo menos dois meses de vida, portanto em condições de reproduzir. Então, cada elemento da sequência de Fibonacci é a soma dos dois precedentes. Como já sabemos que  $f_0 = f_1 = 1$ , podemos construir toda a sequência:

$$\begin{aligned}f_0 &= 1, f_1 = 1, f_2 = f_0 + f_1 = 2, \\f_3 &= f_1 + f_2 = 3, f_4 = f_2 + f_3 = 5, \\f_5 &= f_3 + f_4 = 8, f_6 = f_4 + f_5 = 13, \dots\end{aligned}$$

ou seja,

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$



Que relação pode existir entre esta sequência e a razão áurea? Aparentemente nenhuma. No entanto, vamos demonstrar agora – para surpresa de todos nós! ... – que a razão áurea  $m$  é o limite, com  $n$  tende a infinito, da razão  $f_{n-1}/f_n$ , isto é,

$$m = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n-1}}{f_n}. \quad (7)$$

De fato, pode-se observar (e demonstra-se por indução) que os coeficientes de  $a$  e também os de  $b$  na sequência (2), a partir do quarto termo, a menos de sinal, são os números de Fibonacci, isto é, se

$$a_2 = a - b, \quad a_3 = -a + 2b, \quad a_4 = 2a - 3b, \quad \dots \quad \text{então}$$

$$a_n = (-1)^n (f_{n-2}a - f_{n-1}b). \quad (8)$$

Lembrando que a sequência (2) tende a zero quando  $n \rightarrow \infty$ , tem-se:  $f_{n-2}a - f_{n-1}b \rightarrow 0$ .

Dividindo por  $af_{n-1}$ , vê-se que  $\frac{b}{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}}$ .

A título de curiosidade, vamos calcular  $f_{n-1}/f_n$ , com três casas decimais, para  $n = 1, 2, \dots, 8$ :

$$\frac{1}{1} = 1, \quad \frac{1}{2} = 0,5, \quad \frac{2}{3} \cong 0,666, \quad \frac{3}{5} = 0,6, \quad \frac{5}{8} = 0,625,$$

$$\frac{8}{13} \cong 0,615, \quad \frac{13}{21} \cong 0,619, \quad \frac{21}{34} \cong 0,618.$$

Para  $n \geq 8$ , a razão  $f_{n-1}/f_n$  é sempre 0,618, com arredondamento na 3ª casa decimal.

### O pentagrama e observações finais

A divisão áurea é conhecida desde os pitagóricos de cinco séculos a.C. Ao que tudo indica, essa divisão foi descoberta no pentágono regular, que exibe uma surpreendente profusão de segmentos na razão áurea. Talvez este tenha sido o motivo que levou os pitagóricos a adotarem o pentagrama (pentágono regular estrelado) como símbolo de sua seita (figura 10).



Na figura, os vértices da estrela dividem o círculo em cinco partes iguais. Portanto, cada arco mede  $72^\circ$ . Os triângulos  $NBE$  e  $ABE$  são semelhantes porque seus ângulos internos medem  $36^\circ$ ,  $72^\circ$  e  $72^\circ$ . Logo,

$$\frac{NB}{BE} = \frac{BE}{AB}.$$

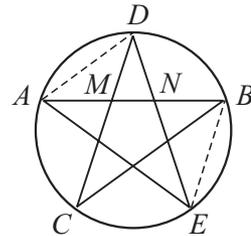


figura 10

Mas  $AN = NE$  (porque  $\widehat{NAE} = \widehat{NEA} = 36^\circ$ ) e  $NE = BE$  (porque  $\widehat{BNE} = \widehat{NBE} = 72^\circ$ ). Temos portanto,

$$\frac{NB}{AN} = \frac{BE}{AB}.$$

e conseqüentemente essas razões são áureas. Pela semelhança dos triângulos  $DMN$  e  $AND$ , prova-se, da mesma forma, que  $MN/AM$  é também áurea.

É muito improvável que Pitágoras ou seus primeiros discípulos soubessem que os segmentos da divisão áurea fossem incomensuráveis, embora haja fundadas razões para se acreditar que a descoberta dos incomensuráveis tenha ocorrido com o pentágono regular no fim do 5º século A.C. Certamente, Pitágoras e seus discípulos sabiam como construir geometricamente a solução (6) da equação (5). As construções correspondentes às figuras 8 e 9 acima se encontram nos “Elementos” de Euclides, de cerca de 300 anos A.C.

Na antiguidade, a divisão de um segmento em média e extrema razão tornou-se tão familiar que era conhecida simplesmente como a “seção”, em qualquer qualificativo. O nome “divisão áurea” lhe foi dado por Kepler (1571-1630), que escreveu:

*A Geometria possui dois grandes tesouros: um é o Teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão. Podemos comparar o primeiro a uma porção de ouro e o segundo a uma jóia preciosa.*

Tanto a razão áurea, como os números de Fibonacci, aparecem numa variedade enorme de situações inesperadas. Hoje a literatura sobre os números de Fibonacci é enorme. Existe até uma revista – *The Fibonacci*



*Quartely* – fundada em 1963, dedicada à pesquisa em torno desses números!

### O Teorema de Lamé

Vamos mostrar agora uma aplicação surpreendente dos números de Fibonacci.

Para encontrar o o máximo divisor comum de dois inteiros, é bastante conhecido o processo que exemplificamos no caso do  $\text{mdc}(243, 37)$ :

	6	1	1	3	5
243	37	21	16	5	1
21	16	5	1	0	

As operações efetuadas acima foram as seguintes:

$$243 = 6 \times 37 + 21$$

$$37 = 21 \times 1 + 16$$

$$21 = 1 \times 16 + 5$$

$$16 = 5 \times 3 + 1$$

$$5 = 1 \times 5.$$

O algoritmo termina quando o resto da divisão é nulo; o máximo divisor comum é o último divisor obtido.

O algoritmo do processo apresentado acima é o célebre *algoritmo de Euclides*, conhecido desde a antiguidade. Ele encontra-se exposto, para números, na Proposição 1 do livro VII dos *Elementos* de Euclides, escritos em torno de 300 a.C.

Os historiadores da Matemática acreditam que esse algoritmo era conhecido já em 400 a.C. Ele é de importância fundamental em teoria dos números.

O que fizemos no exemplo acima pode ser generalizado: *Sejam  $a$  e  $b$  inteiros positivos, com  $a \geq b$ . Usando sucessivamente o algoritmo da divisão, escreva*

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + b_1, & 0 < b_1 < b, \\ b &= b_1q_2 + b_2, & 0 < b_2 < b_1, \\ b_1 &= b_2q_3 + b_3, & 0 < b_3 < b_2, \\ & \dots \end{aligned}$$



$$b_{n-2} = b_{n-1} q_n + b_n, \quad 0 < b_n < b_{n-1},$$

$$b_{n-1} = b_n q_{n+1}.$$

Então  $\text{mdc}(a, b) = b_n$ .

Com efeito, em primeiro lugar, o processo acima realmente chega ao fim. De fato, como  $0 < b_n < b_{n-1} < \dots < b_1 < b$ , vemos que esse processo não pode repetir-se indefinidamente, pois temos uma seqüência estritamente decrescente de inteiros positivos e há um número finito de inteiros entre 0 e  $b$ .

Além disso, usando estas equações de “baixo para cima”, constatamos que  $b_n$  divide  $b_{n-1}$ ,  $b_{n-2}$ , etc, até concluir que  $b_n$  é um divisor comum de  $a$  e  $b$ . Em seguida, usando estas mesmas equações “de cima para baixo”, constatamos que todo divisor comum  $d$  de  $a$  e  $b$  é também um divisor comum de  $b_1$  e  $b_2$ , de  $b_2$  e  $b_3$ , etc, até concluir que  $d$  é também um divisor de  $b_n$ , ou seja, sendo  $b_n$  um múltiplo de  $d$ ,  $b_n$  é maior que ou igual a  $d$ , o que mostra que  $b_n$  é o máximo divisor comum de  $a$  e  $b$ .

Usando o algoritmo de Euclides, são necessárias  $n + 1$  divisões para vermos que  $\text{mdc}(a, b) = b_n$ , pois só chegamos a uma conclusão quando verificarmos que  $b_{n-1} = b_n q_{n+1} + b_{n+1} = b_n q_{n+1} + 0 = b_n q_{n+1}$ .

Chamaremos de comprimento do algoritmo de Euclides o número de divisões necessárias para calcular o  $\text{mdc}(a, b)$ . Usando a notação do teorema, o comprimento do algoritmo de Euclides é  $n + 1$ .

O algoritmo de Euclides é bem eficiente. Por exemplo, se quisermos verificar que  $\text{mdc}(97, 24) = 1$ , serão necessários apenas dois passos:

$$97 = 4 \times 24 + 1$$

$$24 = 24 \times 1.$$

Agora, se queremos calcular  $\text{mdc}(21479, 24)$ , temos

$$21479 = 894 \times 24 + 23,$$

$$24 = 1 \times 23 + 1,$$

$$23 = 1 \times 23.$$

Ou seja, em 3 passos vemos que  $\text{mdc}(21479, 24) = 1$ . Por fim, como último exemplo, para calcular  $\text{mdc}(49745692, 24)$ , temos



$$49745692 = 2072737 \times 24 + 4,$$

$$24 = 6 \times 4;$$

isto é, em apenas 2 passos chegamos ao resultado desejado.

Dados dois números inteiros e positivos  $a$  e  $b$ , uma pergunta natural é: qual o comprimento do algoritmo de Euclides aplicado a eles? Em outras palavras, quantas divisões são necessárias para calcular o máximo divisor comum de  $a$  e  $b$ .

É imediato verificar que, se mantivermos  $b$  fixo, mesmo que  $a$  seja muito grande em relação a  $b$ , o número de divisões no algoritmo de Euclides não pode crescer. Em verdade, esse número depende apenas de  $b$ . Com efeito, usando mais uma vez a notação acima, sabemos que, no algoritmo,  $\text{mdc}(a, b) = b_n$  e que  $0 < b_n < b_{n-1} < \dots < b_1 < b$ . Como há no máximo  $b - 1$  inteiros distintos não negativos entre 0 e  $b$ , vemos que  $n \leq b - 1$ , donde  $n + 1 \leq b$ . Ora, como já vimos, são necessárias  $n + 1$  divisões para determinar o máximo divisor comum. Assim, são necessárias no máximo  $b$  divisões para achar  $\text{mdc}(a, b)$ .

No entanto, esse resultado não é muito bom. Por exemplo, se  $b = 99$ , devemos ter que  $n + 1 \leq 99$  e chegamos à conclusão de que talvez tenhamos que efetuar 99 divisões para calcular o máximo divisor comum!

O Teorema de Lamé melhora muito essa situação:

**Teorema (Lamé).** *Sejam  $a$  e  $b$  inteiros positivos. Então, o comprimento do algoritmo de Euclides aplicado aos números  $a$  e  $b$  é menor que ou igual a cinco vezes o número de dígitos na representação decimal de  $b$ .*

Segundo o teorema, se  $b$  é igual a 99, que tem dois algarismos, então o número de divisões no algoritmo de Euclides é no máximo 10, não sendo influenciado por  $a$ . Isso representa um progresso notável em relação à estimativa anterior.

Esse teorema é devido a Gabriel Lamé (1795-1870) engenheiro e matemático francês, conhecido por seus trabalhos sobre a equação do calor e criador das coordenadas curvilíneas. Embora não tenha se dedicado sistematicamente à teoria dos números, ele deixou algumas jóias sobre o assunto, uma das quais é o teorema anterior.



A demonstração do Teorema de Lamé é um exemplo de utilização inteligente dos números de Fibonacci. Em verdade, essa foi, em 1844, a primeira aplicação “significativa” desses números.

Para efetuarmos a demonstração, voltemos ao algoritmo de Euclides. Em primeiro lugar,  $b_n \geq 1$ , pois  $b_n$  é um número inteiro. De  $b_{n-1} = b_n q_{n+1}$ , vemos que  $b_{n-1} \geq 2$ , pois  $b_{n-1} > b_n$ . Assim,  $b_n \geq f_1$  e  $b_{n-1} \geq f_2$ . Então,

$$b_{n-2} = b_{n-1} q_n + b_n \geq f_2 + f_1 = f_3, \text{ pois } q_n \geq 1.$$

Analogamente,

$$b_{n-3} = b_{n-2} q_{n-1} + b_{n-1} \geq f_3 + f_2 = f_4, \text{ pois } q_{n-1} \geq 1.$$

Continuando dessa maneira, vemos, de maneira geral, que

$$b_{n-k} \geq f_{k+1} \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

e, enfim,

$$b = b_1 q_2 + b_2 \geq f_n + f_{n-1} = f_{n+1},$$

ou seja, fazendo  $b_0 = b$ , temos:

$$b_{n-k} \geq f_{k+1}, \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Ilustrando:

$$\begin{array}{cccccc} b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 & b \\ \geq & \geq & \geq & \dots & \geq & \geq \\ f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_n & f_{n+1} \end{array}$$

Esse resultado nos mostra que o comprimento do algoritmo de Euclides é **menor ou igual ao número de ordem do maior número de Fibonacci menor ou igual a  $b$** .

Podemos ver que esse resultado é o melhor possível achando o máximo divisor comum entre dois números de Fibonacci consecutivos. Calculemos, por exemplo,  $\text{mdc}(21, 13) = \text{mdc}(f_7, f_6)$ :

$$\begin{aligned} 21 &= 13 + 8 \\ 13 &= 8 + 5 \\ 8 &= 5 + 3 \\ 5 &= 3 + 2 \\ 3 &= 2 + 1 \\ 2 &= 1 \times 2 + 0. \end{aligned}$$

Nesse exemplo,  $f_7$  e  $f_6$  não desempenham nenhum papel essencial,



pois o mesmo acontece no caso geral, para achar  $\text{mdc}(f_{n-1}, f_n)$ .

Consideremos agora o número áureo  $u = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618\dots$

Temos, como visto anteriormente,  $u^2 = 1 + u$ . Logo,

$$u^2 = u + 1 < 2 + 1 \leq f_2 + f_1 = f_3,$$

$$u^3 = u^2 + u < f_3 + 2 \leq f_3 + f_2 = f_4,$$

$$u^4 = u^3 + u^2 < f_4 + f_3 = f_5,$$

e assim sucessivamente, chegando enfim a  $u^j < f_{j+1}$ ,  $j = 2, 3, 4, \dots$

Em particular,  $u^n < f_{n+1} \leq b$ .

Como a função  $\log_{10}x$  é estritamente crescente, temos que

$$n \log_{10}u < \log_{10}b, \text{ ou, equivalente, } n < \frac{\log_{10}b}{\log_{10}u}.$$

Ora, calcula-se facilmente, usando uma tábua de logaritmos ou uma máquina de calcular, que

$$\log_{10}u = \log_{10}\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 0,20898 > 0,20 = \frac{1}{5}, \text{ ou seja, } \frac{1}{\log_{10}u} < 5.$$

$$\text{Assim, } n < \frac{\log_{10}b}{\log_{10}u} < 5 \log_{10}b$$

Se o número de algarismos na representação decimal de  $b$  é  $s$ , então

$$b = t_{s-1}10^{s-1} + t_{s-2}10^{s-2} + \dots + t_110 + t_0,$$

e, portanto,  $b < 10^s$ , donde  $\log_{10}b < s$ , e vemos que  $n < 5s$ . Como  $n$  é um inteiro estritamente menor do que  $5s$ , temos que  $n + 1 \leq 5s$ , o resultado procurado.

Adaptado dos artigos

*Retângulo áureo, divisão áurea e seqüência de Fibonacci.*

Geraldo Ávila, **RPM** 06.

*O símbolo da SBM*

Eduardo Wagner, **RPM** 20.

*Euclides, Fibonacci e Lamé*

João Bosco Pitombeira de Carvalho, **RPM** 24.



## Usando Geometria para somar

### Introdução

Um dos maiores prazeres da Matemática é o da descoberta (ou da redescoberta) de resultados matemáticos mesmo que já conhecidos. Iniciamos este artigo com o problema clássico de calcular a soma dos  $n$  primeiros números naturais pelo método que Gauss teria utilizado aos dez anos para somar de 1 a 100 de cabeça, para surpresa do seu professor. Mostraremos ainda como calcular a soma dos quadrados dos  $n$  primeiros naturais e outros resultados interessantes.

Seja  $S = 1 + 2 + 3 + \dots$  a soma dos  $n$  primeiros números naturais. O método utilizado pelo jovem Gauss para calcular essa soma é bastante simples, embora engenhoso. Ele escreveu a soma pedida e, embaixo, escreveu a mesma soma ao contrário

$$S = 1 + 2 + (n - 1) + n$$

$$S = n + (n - 1) + \dots + 2 + 1$$

Somando, obtemos  $2S = (n + 1) + (n + 1) + \dots + (n + 1)$

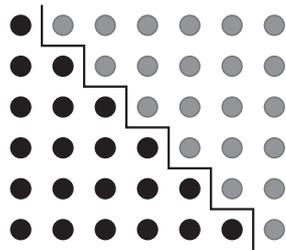
com  $n$  parcelas, ou seja,  $S = \frac{n(n+1)}{2}$ .

A demonstração a seguir usa essencialmente a mesma ideia.



### A soma dos $n$ primeiros números naturais

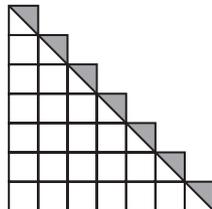
**I.** A soma dos  $n$  primeiros números naturais pode ser visualizada geometricamente através da figura abaixo. Nela vê-se um retângulo formado por bolinhas. A base do retângulo possui  $n + 1$  bolinhas e a altura tem  $n$  bolinhas. No total, temos então  $n(n + 1)$  bolinhas. Observe agora que elas estão divididas em duas partes iguais pela linha poligonal e em cada uma delas aparece a soma  $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ . Obtém-se, então, a fórmula da soma dos  $n$  primeiros números naturais.



$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

**Nota da RPM:** A figura acima apareceu na coluna de Martin Gardner “Mathematical Games”, da *Scientific American* de outubro de 1973, junto com várias outras chamadas *look-see diagrams* (diagramas olhe-veja) e o autor cita que ela já era conhecida pelos gregos antigos. Posteriormente, figuras demonstrando resultados matemáticos conhecidos apareceram em várias revistas. Em 1993, as melhores demonstrações dessas revistas foram reunidas por Roger Nelsen e publicadas no livro *Proofs without words – Exercises in visual thinking* pela MAA (Mathematical Association of America). Esse livro será a nossa principal referência neste artigo, doravante designado por [Pww] (Pww - *Proofs without words* – Demonstrações sem palavras)

**II.** Uma outra forma de obter a soma dos  $n$  primeiros números naturais utiliza a figura a seguir e o conceito de área. Observe que a soma  $1 + 2 + 3 + \dots + n$  é igual à área do triângulo grande (metade de um Quadrado de lado  $n$ ) mais a metade de  $n$  quadrados.

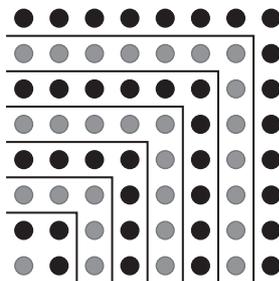


$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n + 1)}{2}$$



### A soma dos números ímpares

A soma dos  $n$  primeiros números ímpares pode ser visualizada através da figura a seguir. O fato de que essa soma é igual a  $n^2$  já era do conhecimento dos antigos pitagóricos, mas a figura é da autoria de Nicômaco de Gerasa (um pitagórico tardio), que viveu em torno do ano 100 d.C. [Pww].



$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

### A soma dos quadrados dos $n$ primeiros números naturais

I. Considere inicialmente três “castelos” iguais como os da figura A. Cada um deles é formado por  $1 + 4 + 9 + \dots + n^2$  cubos unitários. Na figura B os três castelos foram reunidos e nota-se que o último andar possui apenas a metade dos cubos necessários para completar um paralelepípedo.

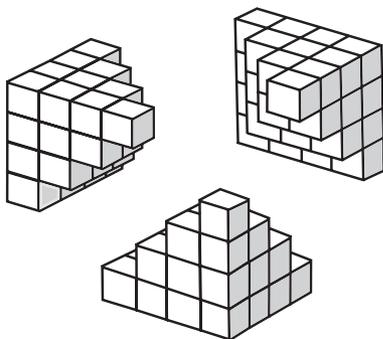


figura A

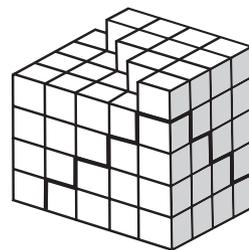


figura B

figuras de [Pww]



A figura *C* mostra os cubos do último andar cortados horizontalmente pela metade, sendo a parte de cima (mais escura) utilizada para completar o paralelepípedo. Pela figura *D* vemos que a soma  $1 + 2^2 + \dots + n^2$ , que é o volume dos castelos iniciais, é um terço do volume de um

paralelepípedo de base  $n$  por  $n + 1$  e altura  $n + \frac{1}{2}$ . Portanto,

$$1 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}n(n+1)\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

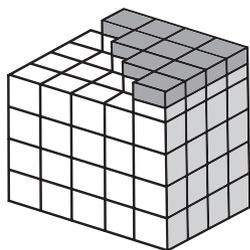


figura *C*

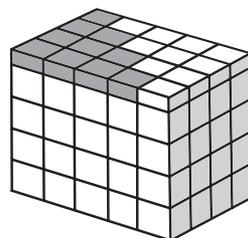


figura *D*

figuras de [Pww]

### A soma de uma série geométrica

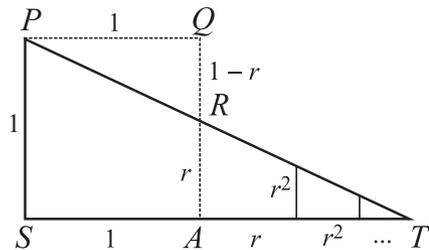
Seja  $r$  um número positivo menor que 1, quanto vale a soma infinita  $1 + r + r^2 + r^3 + \dots$ ? A resposta pode ser obtida através de um desenho bastante engenhoso.

Na figura seguinte,  $ASPQ$  é um quadrado de lado 1 e  $AR = r$ . A reta  $PR$  forma o triângulo  $PTS$  no qual  $ST = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$

(Essa última igualdade pode ser verificada construindo-se um novo quadrado de lado  $r$  obtendo o segmento de medida  $r^2$  uma vez que a

razão entre as medidas dos segmentos é  $\frac{1}{r} = \frac{r}{r^2}$ . Continuando o

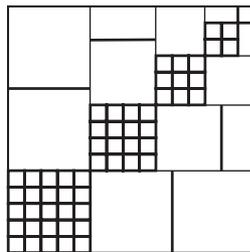
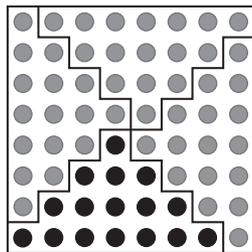
processo, construindo-se quadrados de lados  $r^2, r^3, \dots$  obtemos a medida indicada para o segmento  $ST$ .)



Da semelhança entre os triângulos  $PTS$  e  $RPQ$  temos  $\frac{ST}{SP} = \frac{QP}{QR}$ ,

ou seja,  $1 + r + r^2 + r^3 + \dots = \frac{1}{1-r}$ .

**Para você pensar:** O que cada umas das figuras seguintes pode mostrar?



**Sugestão:** figura da esquerda:  $4(1 + 3 + \dots)$

figura da direita:  $1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 4^2 + 5 \cdot 5^2 = \dots$

### Observação

É certo que, as demonstrações visuais podem parecer, em um primeiro momento, ter algo de “magia”. É importante perceber que a mágica é apenas aparente: a descoberta de um resultado matemático é fruto de experimentação, dedicação e compreensão dos conceitos envolvidos. Deve ficar clara também a necessidade, no caso de números naturais, por exemplo, do axioma da indução, para provar definitivamente certos resultados.

Adaptado do artigo

*Usando Geometria para somar*

Eduardo de Campos Valadares e Eduardo Wagner, **RPM** 39.



## Médias

As médias mais conhecidas pelos estudantes e professores de Matemática são a **média aritmética**, a **média geométrica** e a **média harmônica**.

Para dois números  $a$  e  $b$ , estas médias são, respectivamente:

$$A = \frac{a+b}{2} \quad G = \sqrt{ab} \quad H = \frac{2ab}{a+b}.$$

Para calcular a média geométrica  $G$ , costuma-se exigir que  $a$  e  $b$  sejam positivos e, para calcular a média harmônica  $H$ , exige-se que  $a$  e  $b$  sejam não nulos. De agora por diante, consideraremos apenas números positivos.

A média geométrica também pode ser escrita como:

$G^2 = ab$  ou  $\frac{a}{G} = \frac{G}{b}$ . A média harmônica também pode

ser vista como o inverso da média aritmética dos inversos,

isto é:  $\frac{1}{H} = \frac{1/a + 1/b}{2}$ .

Decorre imediatamente das definições que  $AH = G^2$ , o que mostra que a média geométrica de dois números é também a média geométrica entre a média aritmética e a média harmônica destes números.



Para ter uma visão unificada destas três médias, considere as relações seguintes envolvendo os números reais  $a$ ,  $b$  e  $c$ , positivos e distintos:

$$\frac{a-c}{c-b} = \frac{a}{a} \quad (1)$$

$$\frac{a-c}{c-b} = \frac{a}{b} \quad (2)$$

$$\frac{a-c}{c-b} = \frac{a}{c} \quad (3)$$

Estas equações diferem apenas nos segundos membros: na equação (1) o denominador do quociente é  $a$ , na (2) é  $b$ , e na (3) é  $c$ .

Isolando  $c$  na equação (1), obtemos  $c = (a + b)/2$ , ou seja,  $c$  é a *média aritmética* de  $a$  e  $b$ ; isolando  $c$  em (2), obtemos  $c = 2ab/(a + b)$ , ou seja,  $c$  é a *média harmônica* de  $a$  e  $b$ ; isolando  $c$  em (3), obtemos  $c = \sqrt{ab}$ , ou seja,  $c$  é a *média geométrica* de  $a$  e  $b$ .

Por exemplo, para os números 2 e 18, temos:

$$A = \frac{2+18}{2} = 10 \quad G = \sqrt{2 \cdot 18} = 6 \quad H = \frac{2 \cdot 2 \cdot 18}{2+18} = 3,6.$$

Neste exemplo, observa-se que qualquer destas médias está entre o menor e o maior dos números. Mais ainda, no exemplo:

$$2 < 3,6 < 6 < 10, \text{ ou seja } a < H < G < A < b.$$

Vamos mostrar agora que este fato é geral, isto é:

**Dados os números positivos  $a$  e  $b$ , com  $a \leq b$ ,**

**tem-se:  $a \leq H \leq G \leq A \leq b$ .**

**Além disso, se  $a < b$ , então:  $a < H < G < A < b$ .**

De fato, se  $a = b$ , então  $A = \frac{a+a}{2} = a$ ;  $G = \sqrt{a \cdot a} = a$ ;  $H = \frac{2aa}{a+a} = a$ , isto é,  $a = H = G = A = b$ .

Por outro lado, se  $a < b$ , temos, sucessivamente:

$$a + b < b + b = 2b; \quad a(a + b) < 2ab; \quad a < \frac{2ab}{a+b}, \text{ isto é: } a < H.$$



$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 > 0; \quad a^2 + 2ab + b^2 > 4ab; \quad (a+b)^2 > \frac{4a^2b^2}{ab};$$

$$ab > \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}; \quad \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}, \text{ ou seja: } H < G.$$

$$0 < (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{a}\sqrt{b}; \quad \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}, \text{ ou seja: } G < A.$$

$$a + b < b + b; \quad a + b < 2b; \quad \frac{a+b}{2} < b, \text{ isto é: } A < b.$$

É possível também visualizar geometricamente essas desigualdades. Para isso, como na figura 1, colocamos consecutivamente numa mesma reta os segmentos  $PQ = a$  e  $QS = b$ , com  $Q$  entre  $P$  e  $S$ . Com centro no ponto médio  $M$  de  $PS$ , construímos uma semicircunferência  $K$ , e os segmentos  $MT$  e  $QD$ , perpendiculares a  $PS$ , com  $T$  e  $D$  em  $K$ .

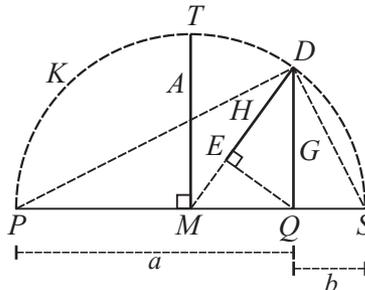


figura 1

Construímos também o segmento  $DM$  e o ponto  $E$ , projeção ortogonal de  $Q$  sobre  $DM$ . Como  $a + b$  é diâmetro e  $MT$  o raio de  $K$ , então  $MT$  é a média aritmética de  $a$  e  $b$ , isto é,  $MT = A$ .

Além disso, o triângulo  $PDS$  é retângulo em  $D$ , por estar inscrito em uma semicircunferência de diâmetro  $PS$ ; logo, a altura  $QD$  é a média geométrica de  $PQ = a$  e  $QS = b$ , ou seja:  $QD = G$ .

Finalmente, no triângulo retângulo  $DQM$ ,  $DE$  é a projeção ortogonal do cateto  $DQ$  sobre a hipotenusa  $DM = A$  como  $DE$ ; logo:  $DQ^2 = DM \cdot DE$ , isto é:  $DE = DQ^2 / DM = G^2 / A = H$ . Logo:  $DE = H$  é a média harmônica de  $a$  e  $b$ .



Na figura 1, pode-se verificar que  $H < G < A$ . De fato,  $H < G$  porque  $H$  é cateto e  $G$  hipotenusa no triângulo  $DEQ$ , enquanto  $G < A$  porque  $G$  é cateto e  $A$  hipotenusa no triângulo  $DQM$ .

Note que quando  $a = b$ , o ponto  $Q$  coincide com  $M$ . Neste caso,  $H = G = A$ , como era de esperar.

Outra maneira de visualizar as desigualdades entre as médias é considerar um trapézio com bases  $a$  e  $b$ .

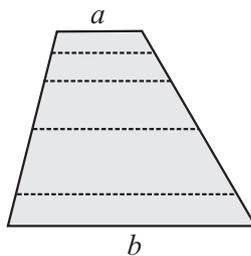


figura 2

Observamos que conforme um segmento paralelo às bases  $a$  e  $b$ , com extremidades nos dois lados transversos, “caminha” se afastando de  $a$  e se aproximando de  $b$ , sua medida assume todos os valores entre  $a$  e  $b$ , e, conseqüentemente, todas as médias consideradas.

Veremos a seguir que os valores  $A$ ,  $G$  e  $H$  “aparecem” conforme o segmento paralelo às bases assume alguma posição notável no trapézio.

1) Suponhamos o segmento de medida  $m$  equidistante das bases.

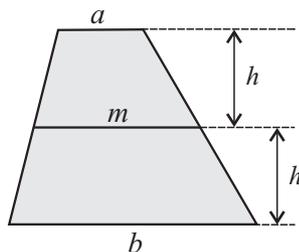


figura 3

A soma das áreas dos dois trapézios menores é a área do trapézio inicial:

$$\frac{(a+m)h}{2} + \frac{(m+b)h}{2} = \frac{(a+b)2h}{2} \text{ o que implica } m = \frac{a+b}{2} = A.$$



- 2) Consideremos agora que o segmento de medida  $m$  divide o trapézio inicial em dois trapézios semelhantes.

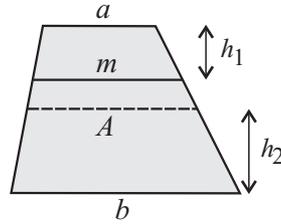


figura 4

Temos  $\frac{a}{m} = \frac{m}{b}$ , implicando  $m = \sqrt{ab} = G$ .

Note que, sendo  $\frac{a}{\sqrt{ab}} = \frac{h_1}{h_2}$ , pois os trapézios são semelhantes,

temos  $h_1 < h_2$ , pois  $a < \sqrt{ab}$ , e, por isso,  $h_1 < h$ . Logo,  $m = G < A$ .

- 3) Finalmente, consideremos o segmento de medida  $m$  passando pelo encontro das diagonais.

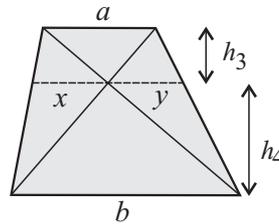


figura 5

Por semelhança de triângulos temos:

$$\frac{x}{a} = \frac{h_4}{h_4 + h_3}; \quad \frac{x}{b} = \frac{h_3}{h_4 + h_3}; \quad \text{e} \quad \frac{y}{a} = \frac{h_4}{h_4 + h_3},$$

implicando  $x = y$  e  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ .



Substituindo  $x = y$  na última igualdade, encontramos  $x = \frac{ab}{a+b}$  e, portanto,  $m = 2x = \frac{2ab}{a+b} = H$ .

Ainda, usando semelhança de triângulos, temos  $\frac{a}{b} = \frac{h_3}{h_4}$ . Mas  $\frac{a}{\sqrt{ab}} = \frac{h_1}{h_2}$  e  $\frac{a}{b} < \frac{a}{\sqrt{ab}}$ , ou seja,  $\frac{h_3}{h_4} < \frac{h_1}{h_2}$  e como  $h_3 + h_4 = h_1 + h_2$

tem-se  $h_3 < h_1$  e, portanto,  $H < G$ .

Caso permitíssemos que as bases do trapézio se igualassem, ou seja, ter  $a = b$ , o trapézio se transformaria num paralelogramo e assim, obviamente, as três médias se igualariam a  $a$  e  $b$ .

### Onde aparece a média harmônica

São inevitáveis as perguntas pragmáticas que alunos e professores costumam fazer: Para que serve o estudo da média harmônica? Onde se aplica a média harmônica?

Sem a pretensão de responder cabalmente a essas perguntas, vou apenas salienta a importância da média harmônica, assinalando a sua presença em alguns problemas da vida prática.

#### • O problema das velocidades

O sr. Mário, um imprudente vendedor de filtros de água, costuma acordar cedo e viajar de carro, da cidade  $A$  até a cidade  $B$ , com a velocidade média de 120 km/h. Depois de visitar seus clientes e tomar com eles algumas garrafas de cerveja, ele volta de  $B$  para  $A$ , com a velocidade média de 60 km/h. Qual é a velocidade média que o sr. Mário desenvolve no percurso todo?

A resposta mais imediata que surge em nosso cérebro é que a velocidade média no percurso todo é a média aritmética das velocidades na ida e na volta, o que daria 90 km/h. Essa resposta, embora “intuitiva”, está errada! Temos que estar sempre alertas, à maneira dos escoteiros, para não deixar a razão matemática ser desgovernada por falsas “intuições”.



A resolução correta do problema é a seguinte. Sejam:

$d$ : a distância entre as cidades  $A$  e  $B$

$v_1$ : a velocidade média na ida       $t_1$ : o tempo de viagem na ida

$v_2$ : a velocidade média na volta       $t_2$ : o tempo de viagem na volta

Temos então que  $d = v_1 t_1 = v_2 t_2$ . Se  $v$  é a velocidade média no percurso todo, temos:

$$2d = v(t_1 + t_2). \text{ Logo, } 2d = v(d/v_1 + d/v_2).$$

Simplificando:  $v = 2v_1 v_2 / (v_1 + v_2)$ .

Substituindo os valores  $v_1 = 120$  km/h e  $v_2 = 60$  km/h, obtemos  $v = 80$  km/h.

Moral da história: a velocidade média no percurso todo é a média harmônica das velocidades na ida e na volta.

A média harmônica geralmente aparece em problemas que envolvem velocidades, vazões, frequências e taxas. O exemplo seguinte é uma versão simples de um problema de vazão bastante conhecido.

#### • O problema das torneiras

Se uma torneira enche um tanque em 60 minutos e uma outra torneira enche o mesmo tanque em 30 minutos, em quanto tempo as duas torneiras juntas encham o tanque?

Os leitores estão convidados a resolver mais esse problema, e para isso damos uma pequena “dica”: a resposta não é a média harmônica de 60 min e 30 min, mas está relacionada a ela.

Problemas de torneiras são antiquíssimos. Uma de suas versões aparece por exemplo na *Antologia grega* organizada por *Metrodoro*, um matemático grego que vivia por volta do ano 500 depois de Cristo. A tradução para o português seria mais ou menos a seguinte:

*Eu sou um leão de bronze; de meus olhos, boca e pé direito jorra água. Meu olho direito enche uma jarra em dois dias, meu olho esquerdo em três dias, e meu pé direito em quatro dias. Minha boca é capaz de enchê-la em seis horas, diga-me quanto tempo os quatro juntos levarão para enchê-la?*

Para finalizar esta seção, mais um problema.



### • O problema do uísque

Durante 4 meses consecutivos, o sr. Mário comprou uísque para o bar de sua casa aos preços, respectivamente, de 16, 18, 21 e 25 reais por garrafa. Qual foi o custo médio do uísque para o sr. Mário nesse período todo?

Esse é um daqueles problemas que nos deixam frustrados, pois só depois de muita batalha notamos que faltam dados; temos necessariamente que introduzir alguma hipótese para poder resolver o problema.

- (i) Uma hipótese plausível é que, talvez por ser um bebedor regular, o sr. Mário tenha comprado a *mesma quantidade*  $x$  de uísque a cada mês.

Logo, ele despendeu  $16x + 18x + 21x + 25x = 80x$  reais para comprar uísque no período. Daí, o custo médio no período de 4 meses foi de  $80x/4x = 20$  reais por garrafa. Portanto, caso essa hipótese seja verdadeira, o custo médio no período é a *média aritmética* dos custos mensais.

- (ii) Uma outra hipótese plausível é que, talvez por não ter tido aumento de salário nesse período, o sr. Mário tenha gasto a *mesma quantia*  $y$  de reais a cada mês.

Logo, ele consumiu  $y/16 + y/18 + y/21 + y/25$  garrafas no período. Assim, o custo médio nesse período foi, aproximadamente:

$$4y/(y/16 + y/18 + y/21 + y/25) = 19,5 \text{ reais por garrafa.}$$

Portanto, neste caso, o custo médio no período é a *média harmônica* dos custos mensais.

### Médias para mais de dois números

As médias que vimos para dois números podem ser generalizadas para mais números. Vamos fazer isto aqui somente para as médias aritmética e geométrica.

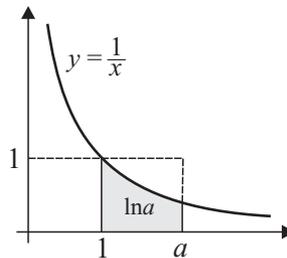
Dados  $n$  números positivos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , definimos.

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \text{e} \quad G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$



Deixamos para o leitor verificar que, se todos os números forem iguais a um valor  $v$ , então  $A = G = v$ . Porém, se eles não forem *todos* iguais, a média geométrica é sempre menor que a média aritmética, mas a demonstração, nesse caso, não é tão fácil como no caso  $n = 2$ . Existem demonstrações de vários tipos, de diversos graus de sofisticação e baseadas em diferentes teorias. A mais conhecida é a demonstração de *Cauchy* (1789-1857), que pode ser encontrada no livro *Meu Professor de Matemática e outras histórias* de Elon Lages Lima, p. 153, publicado pela SBM. Vamos dar aqui a demonstração concebida por *Polya*, que se baseia na desigualdade  $e^x \geq 1 + x$ , justificada a seguir:

Observemos que se pode definir o logaritmo (natural) de um número positivo  $a$  como sendo a área limitada pelo eixo das abscissas, pela curva  $y = 1/x$  e pelas retas verticais  $x = 1$  e  $x = a$ . Como essa região está contida no retângulo de altura 1 e base  $a - 1$ , temos, é claro,  $\ln a \leq a - 1$ . Fazendo  $a = 1 + x$ , obtemos  $\ln(1 + x) \leq x$  ou  $e^x \geq 1 + x$ , valendo a igualdade apenas se  $a = 1$ , ou seja,  $x = 0$ .



Resolvida essa parte, podemos então demonstrar a desigualdade das médias para  $n$  números.

Na desigualdade  $e^x \geq 1 + x$  vamos substituir  $x$  por  $\frac{x_i}{A} - 1$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ , obtendo as relações

$$e^{\frac{x_1}{A} - 1} \geq \frac{x_1}{A}$$

$$e^{\frac{x_2}{A} - 1} \geq \frac{x_2}{A}$$

$$e^{\frac{x_n}{A} - 1} \geq \frac{x_n}{A}$$

Multiplicando, obtemos 
$$e^{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{A} - n} \geq \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{A^n}.$$



Mas,  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = nA$ , logo  $1 \geq \frac{G^n}{A^n}$  ou  $A \geq G$ .

como queríamos demonstrar. É claro que a igualdade vale se, e somente

se,  $\frac{x_i}{A} - 1 = 0$  ou seja,  $x_i = A$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ .

### Aplicações das desigualdades das médias

**Exemplo 1:** Mostre que se  $x > 0$ , então:  $x + \frac{1}{x} \geq 2$ .

*Solução:* Aplicando a desigualdade das médias aos números  $x$  e  $1/x$ ,

obtemos  $\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1$  ou seja,  $x + \frac{1}{x} \geq 2$ , ocorrendo a igualdade

se e somente se,  $x = 1$ .

### Exemplo 2

Para todos os valores das variáveis  $x, y, z, w$ , reais positivas, qual é o menor valor da expressão

$$E = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{w} + \frac{w}{x} ?$$

*Solução:*

$$\frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{w} + \frac{w}{x}}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{w} \cdot \frac{w}{x}} = 1$$

Logo,  $E \geq 4$ , ocorrendo a igualdade se  $x = y = z = w$ .

### Exemplo 3

Para  $x > 0$ , qual é o valor mínimo de  $y = x^2 + \frac{1}{x}$  ?

*Solução:* Escrevemos  $y = x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x}$ . Desta forma temos



$$\frac{x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x}}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{2x}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}.$$

Portanto,  $y \geq \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ , ocorrendo a igualdade quando  $x^2 = \frac{1}{2x}$ , ou seja,  
 $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ .

#### Exemplo 4

Se  $x$ ,  $y$  e  $z$  são positivos, qual é o valor mínimo de

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)?$$

Este exemplo será deixado como exercício para o leitor. A resposta é 9.

A desigualdade entre as médias aritmética e geométrica tem como consequência as seguintes afirmações:

- I) Se a soma de  $n$  números positivos for constante, então o produto será *máximo* quando todos os números forem iguais.
- II) Se o produto de  $n$  números positivos for constante, então a soma será *mínima* quando todos os números forem iguais.

Daremos mais dois exemplos para mostrar como funciona a afirmação I).

#### Exemplo 5

Sendo  $x$  e  $y$  números reais positivos, determinar o máximo de

$$E = xy(1 - x - y).$$

*Solução:* Consideremos apenas os valores de  $x$  e  $y$  tais que  $x + y < 1$  (se  $x + y \geq 1$ , teremos  $1 - x - y \leq 0$  e o máximo que estamos procurando é obviamente positivo).

Então, os números  $x$ ,  $y$  e  $1 - x - y$  são positivos e possuem soma igual a 1. Logo, o produto será máximo quando todos forem iguais ou seja,

$$E_{\max} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}.$$



### Exemplo 6

Provar que, de todos os triângulos de mesmo perímetro, o equilátero possui a maior área.

*Solução:* Consideremos um triângulo de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  com  $a + b + c = 2p$ . A área  $S$  desse triângulo é dada pela fórmula de Heron,

$$S = \sqrt{p \cdot (p - a)(p - b)(p - c)}$$

Para poder aplicar a afirmativa I, devemos escrever

$$S = \sqrt{p \cdot \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)}}$$

Ora, o semiperímetro  $p$  é constante. Então  $S$  será máximo quando  $(p - a)(p - b)(p - c)$  for máximo. Mas

$$p - a + p - b + p - c = 3p - 2p = p \text{ (constante)}$$

logo o produto será máximo quando

$$p - a = p - b = p - c = \frac{p}{3}, \text{ ou seja}$$

$$a = b = c = \frac{2p}{3} \text{ como queríamos demonstrar.}$$

Adaptado dos artigos

*Dois médias*

Eduardo Wagner, **RPM** 18.

*Média harmônica*

Seiji Hariki, **RPM** 32.

*Uma aula sobre médias*

Chico Nery, **RPM** 68.



## Problemas diversos resolvidos com Geometria Analítica

A Geometria Analítica, ou melhor o método das coordenadas, é uma ferramenta útil para resolver problemas diversos, mesmo aqueles que não contêm equações ou coordenadas. É interessante observar problemas que permitem a introdução de um sistema adequado de coordenadas e conseguir assim, soluções simples e convincentes.

A seguir, mostraremos alguns problemas desse tipo. Para cada um deles outras formas de resolução são possíveis, mas o método das coordenadas é uma boa opção.

### Problema 1

Um pesado caminhão parte ao meio dia da cidade  $A$  para a cidade  $B$  viajando com velocidade constante de  $40 \text{ km/h}$ , e às 6 horas da tarde chega à cidade  $B$ . Um automóvel parte da cidade  $B$  às 2 horas da tarde desse dia e, viajando com velocidade constante pela mesma estrada, chega à cidade  $A$  também às 6 da tarde. Pergunta-se em que momento o caminhão e o automóvel se cruzaram na estrada.

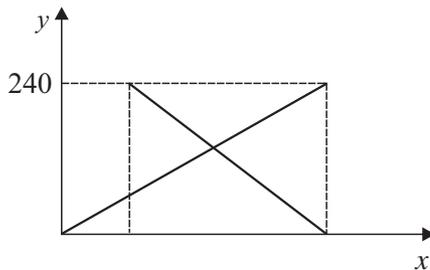
### *Solução*

A distância entre as cidades  $A$  e  $B$ , ao longo da estrada é de  $6 \times 40 = 240 \text{ km}$ . Vamos introduzir o seguinte sistema de coordenadas: para um objeto qualquer que se mova



ao longo da estrada, seja  $x$  o tempo (em horas) decorrido após o meio dia e seja  $y$  (em quilômetros) a sua distância à cidade  $A$ . Os gráficos correspondentes aos movimentos do caminhão e do automóvel são retas, uma vez que eles viajam com velocidades constantes. De acordo com os dados do problema, o gráfico que mostra o movimento do caminhão é um segmento de reta cujos extremos são os pontos  $(0, 0)$  e  $(6, 240)$ , e o gráfico que mostra o movimento do automóvel é um segmento de reta cujos extremos são os pontos  $(2, 240)$  e  $(6, 0)$ . As equações das retas do gráfico abaixo são  $y = 40x$  e  $y = -60x + 360$ .

Resolvendo o sistema encontramos  $x = 3,6$  e  $y = 144$ . Concluímos então que o encontro se deu 3,6 horas após o meio dia, ou seja às 3 horas e 36 minutos da tarde e, nesse momento, ambos estavam a 144 km da cidade  $A$ .



Esse problema nada tem de original, mas serve para ilustrar que diversos problemas de cinemática escalar podem ser resolvidos com o método analítico.

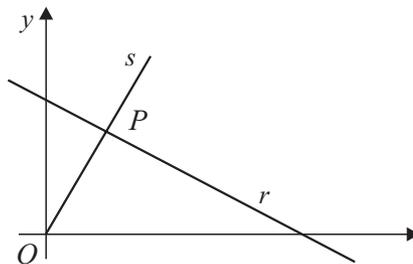
### Problema 2

Considere todos os números reais  $x$  e  $y$  tais que  $x + 2y = 10$ . Para que valores de  $x$  e  $y$  a expressão  $E = x^2 + y^2$  assume menor valor?

#### Solução

Este é um problema de álgebra. Sua solução, uma vez que o enunciado esteja bem entendido, não é difícil. Entretanto, a solução analítica é interessante.

Estabelecendo um sistema de coordenadas, todos os pontos  $P(x, y)$  tais que  $x + 2y = 10$  pertencem a uma reta  $r$  e o valor de  $E$  é o quadrado da distância de  $P$  à origem do sistema de coordenadas.





Precisamos então encontrar o ponto de  $r$  cuja distância ao ponto  $(0, 0)$  é mínima. A reta  $s$ , perpendicular a  $r$  e passando pela origem tem equação  $2x - y = 0$  e a interseção dessas retas é o ponto que procuramos.

Resolvendo o sistema formado pelas duas equações encontramos  $x = 2$  e  $y = 4$  que é a solução do problema. Concluímos ainda que o valor mínimo de  $E$  é  $2^2 + 4^2 = 20$ .

### Problema 3

Na molécula do metano ( $\text{CH}_4$ ) o átomo de carbono ocupa o centro de um tetraedro regular em cujos vértices estão os átomos de hidrogênio. Determine o ângulo entre duas das valências do carbono.

#### Solução

O resultado deste problema está presente em todos os cursos de química orgânica. O estranho número fornecido é aceito por todos, mas, em geral, não se tem a menor idéia de como esse resultado foi obtido. Para calcular esse ângulo, a Geometria Analítica é um método imbatível, aliada é claro, com alguma inventividade.

Vamos utilizar um sistema de coordenadas no espaço e usar a fórmula que fornece o cosseno do ângulo  $\alpha$  entre dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ :

$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$ . Consideremos inicialmente um cubo de aresta 2 (para

facilitar) com um vértice na origem, outro no eixo  $X$ , outro no eixo  $Y$  e outro no eixo  $Z$ . Não é difícil escolher quatro vértices deste cubo que formem um tetraedro regular.

Os pontos  $A = (0, 0, 0)$ ,  $B = (2, 2, 0)$ ,  $C = (0, 2, 2)$  e  $D = (2, 0, 2)$  formam um tetraedro regular (uma vez que as distâncias entre dois quaisquer deles são diagonais de faces do cubo) e são ocupados pelos hidrogênios.

O ponto  $P = (1, 1, 1)$ , centro do cubo e também centro do tetraedro, está ocupado pelo carbono.

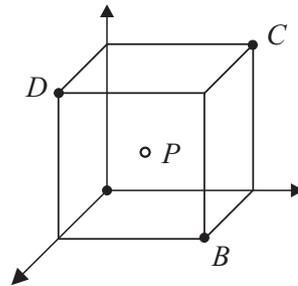
O resto é fácil. Para calcular, por exemplo o ângulo  $APB$ , consideremos os vetores  $\vec{u} = \overrightarrow{PA} = (-1, -1, -1)$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{PB} = (1, 1, -1)$ .



O cosseno do ângulo entre eles é:

$$\cos \alpha = \frac{-1-1+1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = -\frac{1}{3}.$$

Com uma calculadora, determinamos um valor muito aproximado para esse ângulo:  $\alpha = 109^{\circ}28'16,395''$ .



Vamos, nos próximos exemplos, resolver vários problemas de Geometria Plana, usando Geometria Analítica. Naturalmente, todos os problemas apresentados podem ser resolvidos utilizando-se geometria sintética. Sugerimos que os leitores tentem obter essas soluções.

#### Problema 4

O quadrado  $ABCD$  tem lado 10. Sendo  $M$  o ponto médio de  $BC$ , trace  $DP$  perpendicular a  $AM$ . Qual é o comprimento do segmento  $DP$ ?

#### Solução

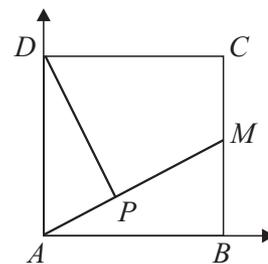
A solução pela geometria sintética passa pela descoberta que os triângulos  $ABM$  e  $DPA$  são semelhantes. Com isso, e mais uma aplicação do teorema de Pitágoras se resolve o problema. Entretanto, com os recursos da Geometria Analítica, a solução não depende da descoberta dessa semelhança. Podemos escolher um sistema de coordenadas com o eixo  $X$  passando por  $AB$  e com o eixo  $Y$  passando por  $AD$ .

Na figura ao lado temos:

$A = (0, 0)$ ,  $B = (10, 0)$ ,  $C = (10, 10)$ ,  $D = (0, 10)$  e  $M = (10, 5)$ . A equação da reta  $AM$  é  $x - 2y = 0$  e o comprimento do segmento  $DP$  é a distância do ponto  $D$  à reta  $AM$ . A distância do ponto  $(x_0, y_0)$  à reta  $ax + by + c = 0$  é dada por:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

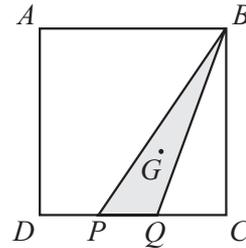
$$\text{Temos, então, } DP = \frac{|0 - 2 \cdot 10|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}.$$





### Problema 5

Na figura, o quadrado  $ABCD$  tem lado 9 e os pontos  $P$  e  $Q$  dividem o lado  $CD$  em três segmentos congruentes. Calcule a distância do vértice  $A$  ao baricentro  $G$  do triângulo  $BPQ$ .



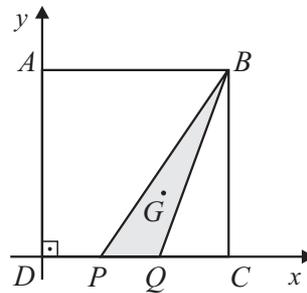
#### Solução

“Encaixemos” o quadrado  $ABCD$  no primeiro quadrante do plano cartesiano, com o vértice  $D$  coincidindo com a origem. Sendo  $A = (0, 9)$ ,  $B = (9, 9)$ ,  $P = (3, 0)$  e  $Q = (6, 0)$ , é conhecido que as coordenadas do baricentro  $G$  são:

$$x_G = \frac{x_B + x_P + x_Q}{3} = \frac{9 + 3 + 6}{3} = 6,$$

$$y_G = \frac{y_B + y_P + y_Q}{3} = \frac{9 + 0 + 0}{3} = 3,$$

portanto,  $G = (6, 3)$ .

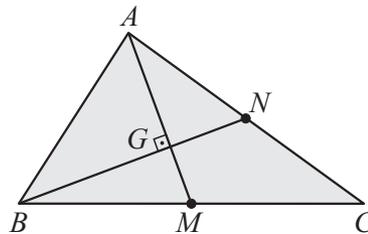


A distância procurada é:

$$d_{AG} = \sqrt{(x_G - x_A)^2 + (y_G - y_A)^2} = \sqrt{(6 - 0)^2 + (3 - 9)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

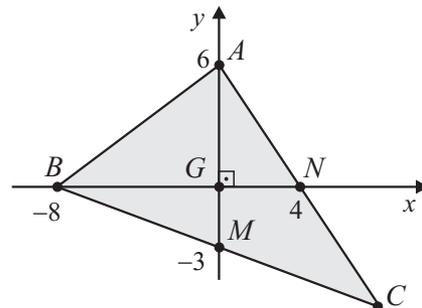
### Problema 6

As medianas  $AM$  e  $BN$  de um triângulo  $ABC$  são perpendiculares e medem, respectivamente, 9 cm e 12 cm. Calcule o comprimento da terceira mediana desse triângulo.



#### Solução

O encontro das medianas é o baricentro  $G$  do triângulo  $ABC$ . Usando o fato de que as medianas  $AM$  e  $BN$  se cortam perpendicularmente em  $G$ , coloquemos esse triângulo no plano cartesiano





com origem em  $G$ . Usando a conhecida proporção em que  $G$  divide as medianas, temos:

$$\begin{cases} AM = 9 \rightarrow AG = 6 \text{ e } GM = 3 \\ BN = 12 \rightarrow BG = 8 \text{ e } GN = 4 \end{cases}, \text{ ou seja, } A = (0, 6), M = (0, -3),$$

$B = (-8, 0)$  e  $N = (4, 0)$ . As equações segmentárias das retas  $AN$  e  $BM$  são, respectivamente,

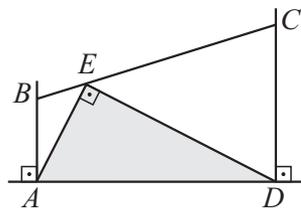
$$\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1 \text{ e } \frac{x}{-8} + \frac{y}{-3} = 1.$$

Resolvendo o sistema anterior, encontramos o ponto  $C = (8, -6)$ . O comprimento da terceira mediana é  $3/2$  da distância entre  $C$  e  $G$ :

$$\frac{3}{2} \sqrt{(x_C - x_G)^2 + (y_C - y_G)^2} = \frac{3}{2} \sqrt{(8-0)^2 + (-6-0)^2} = 15 \text{ cm}.$$

### Problema 7

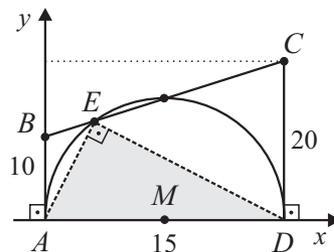
Calcule a área do triângulo  $ADE$ , retângulo em  $E$ , inscrito num trapézio retângulo  $ABCD$ , com  $AB = 10$  cm,  $AD = 30$  cm e  $CD = 20$  cm (figura).



*Solução*

Encaixemos o trapézio  $ABCD$  no primeiro quadrante do plano cartesiano, fazendo os lados  $AD$  e  $AB$  ficarem contidos, respectivamente, nos eixos  $x$  e  $y$ . Como a reta  $BC$  tem coeficiente

$$\text{angular } m = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{20 - 10}{30 - 0} = \frac{1}{3} \text{ e}$$



coeficiente linear  $10$ , sua equação reduzida é  $y = \frac{1}{3}x + 10$ . A circunferência de diâmetro  $AD$ , com centro  $M = (15, 0)$ , passa pelo ponto  $E$  e tem equação:

$$(x - 15)^2 + y^2 = 15^2.$$



O ponto  $E$  é dado pela solução do sistema: 
$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 10 \\ (x-15)^2 + y^2 = 225 \end{cases},$$

ou seja,  $E = (6, 12)$  ou  $E = (15, 15)$ . Portanto, a área do triângulo  $ADE$

$$\text{é: } S_{ADE} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 30 & 0 & 1 \\ 6 & 12 & 1 \end{vmatrix} = 180 \text{ cm}^2 \text{ ou } \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 30 & 0 & 1 \\ 15 & 15 & 1 \end{vmatrix} = 225 \text{ cm}^2.$$

Adaptado dos artigos

*Sobre o ensino de Geometria Analítica*

Eduardo Wagner, **RPM** 41

*A Geometria Analítica no ensino médio*

Chico Nery, **RPM** 67



## A sombra do meu abajur

### Introdução

A fotografia abaixo reproduz o abajur do meu quarto e a sombra que ele projeta na parede. Que curvas são essas?



A cúpula do abajur é um tronco de cone, com altura  $h$  e raios das bases  $R$  e  $r$ . A lâmpada é centralizada, de modo a ficar no eixo do tronco de cone. Para simplificar, podemos imaginar a lâmpada concentrada em um ponto, situado a uma distância  $b$  da base inferior e a uma distância  $c$  da base superior do tronco, sendo  $b + c = h$  (ver figura 1).

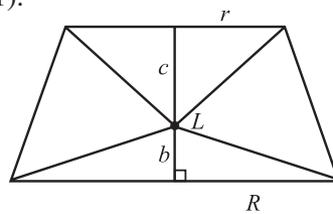


figura 1



A função da cúpula é barrar uma parte dos raios de luz, evitando que a luz atinja diretamente a vista. Os raios de luz que escapam dessa barragem formam um par de cones, ambos com vértice na lâmpada (ver figura 2). Devemos imaginar esses cones prolongados para além das bases da cúpula, um para cima e outro para baixo.

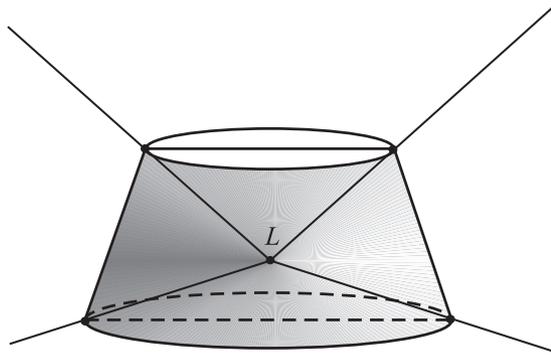


figura 2

### Equacionamento e resolução do problema

Para descobrir a natureza da sombra do abajur, vamos cuidar primeiro da parte superior da sombra, que é a interseção da parede com o cone de luz superior. Esse cone fica caracterizado pelo ângulo  $\theta$  da figura 3, que define sua “abertura” e é tal que:  $m = \operatorname{tg}\theta = r/c$ .

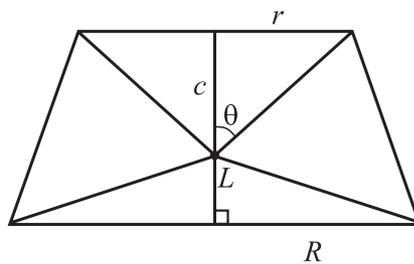


figura 3

Criemos um sistema de coordenadas em três dimensões  $OXYZ$ , de modo que a origem  $O$  do sistema esteja sobre a lâmpada (concebida como um ponto) e o eixo do cone coincida com o semi-eixo positivo  $OZ$ , como na figura 4.

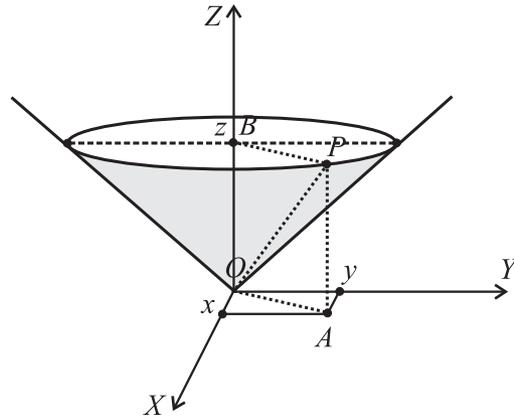


figura 4

Nessa figura, vemos que um ponto genérico  $P = (x, y, z)$  pertence à superfície do cone se e só se, enquanto ele distar  $z = AP$  do plano  $XOY$ , sua distância  $PB$  ao eixo permanecer igual a  $OA = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Porém, a figura 5, vista no plano  $AOB$ , mostra que:  $PB/PA = \text{tg } \theta = m$ , ou seja:  $PB = mPA = mz$ . Logo, a equação do cone é:  $mz = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

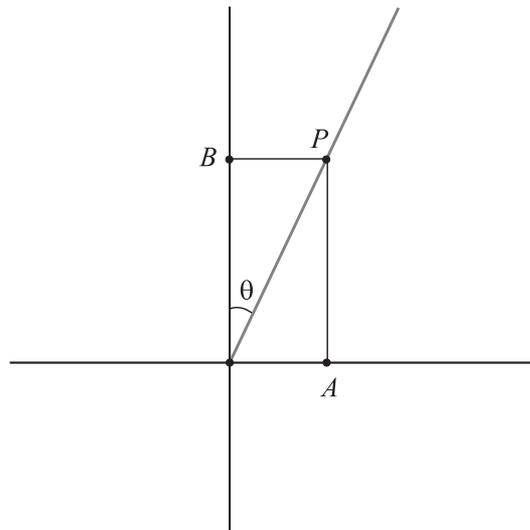


figura 5

A parede é um plano paralelo ao eixo do cone. Podemos ajustar os eixos  $OX$  e  $OY$  de modo que o plano  $XOZ$  fique paralelo à parede. Nesse



caso, a parede tem equação  $y = d$ , onde  $d$  é a distância da lâmpada à parede.

Finalmente, a curva que procuramos é a interseção do cone de equação  $mz = \sqrt{x^2 + y^2}$  com o plano de equação  $y = d$ , isto é, o conjunto dos

pontos  $(x, y, z)$  que são soluções do sistema: 
$$\begin{cases} mz = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y = d \end{cases}$$

Esse sistema obviamente é equivalente ao sistema: 
$$\begin{cases} mz = \sqrt{x^2 + d^2} \\ y = d \end{cases}$$
,

e, se olharmos esses pontos no plano  $y = d$ , poderemos ficar somente com a equação  $mz = \sqrt{x^2 + d^2}$ , que é a equação dessa curva plana nesse plano.

Lembrando que  $m = r/c$ , essa equação fica:  $z = \frac{c}{r} \sqrt{x^2 + d^2}$ .

Para a parte inferior da sombra, um raciocínio inteiramente análogo concluiria que a equação dessa parte da sombra é:  $z = -\frac{b}{R} \sqrt{x^2 + d^2}$ .

Para o abajur do meu quarto, essas dimensões são, aproximadamente:

$$r = 10 \text{ cm}, R = 25 \text{ cm}, b = 10 \text{ cm}, c = 20 \text{ cm e}$$

(quando o abajur está no seu lugar mais usual)  $d = 40 \text{ cm}$ .

Nesse caso, as equações da sombra são, em centímetros:

$$z = 2\sqrt{x^2 + 1600}$$

$$\text{e } z = -0,4\sqrt{x^2 + 1600}.$$

A figura 6 mostra esses gráficos obtidos por um programa de computador.

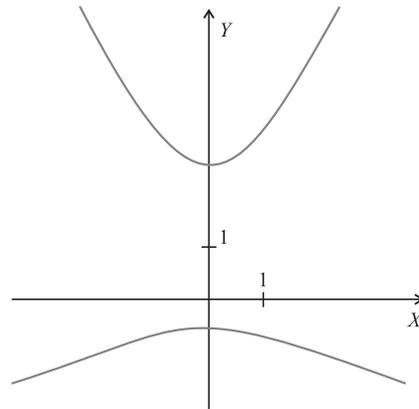


figura 6



### Identificação das curvas

Essas curvas que obtivemos são uma novidade ou será que já as vimos por aí no ensino médio? Na verdade, elas são velhas conhecidas. A sombra superior tem equação  $z = \frac{c}{r}\sqrt{x^2 + d^2}$ . Elevando essa equação ao

quadrado e manipulando, obtemos:  $\frac{z^2}{\left(\frac{cd}{r}\right)^2} - \frac{x^2}{d^2} = 1$ , que é a equação de

uma hipérbole com centro na origem do plano XZ, eixo transversal sobre o eixo Z, de comprimento  $\frac{2cd}{r}$ , e eixo não transversal sobre o eixo X, de comprimento  $2d$ .

Como a equação  $z = \frac{c}{r}\sqrt{x^2 + d^2}$  é equivalente ao sistema,

$$\begin{cases} \frac{z^2}{\left(\frac{cd}{r}\right)^2} - \frac{x^2}{d^2} = 1 \\ z > 0 \end{cases}, \text{ vê-se que a sombra superior é o ramo positivo dessa}$$

hipérbole. Analogamente, a sombra inferior é o ramo negativo da

hipérbole de equação:  $\frac{z^2}{\left(\frac{bd}{R}\right)^2} - \frac{x^2}{d^2} = 1$ .

É interessante observar que, quando a lâmpada se situa exatamente no encontro das diagonais do trapézio da figura 1, então  $\frac{c}{r} = \frac{b}{R}$  (verifique!), de modo que a sombra superior e a sombra inferior são os dois ramos de uma mesma hipérbole.

O leitor pode verificar também que, se o abajur for cilíndrico, as duas partes da sombra serão também os dois ramos de uma mesma hipérbole. Mais ainda: se o cilindro for equilátero (altura igual ao diâmetro da base) e a lâmpada estiver centralizada, a resultante hipérbole



será equilátera (eixos transverso e não transverso de mesmo comprimento).

### Comentários

1. Não deve ser novidade para muitos leitores que a interseção de um cone e um plano possa ser, em certos casos, uma hipérbole. Na verdade, o nome “cônicas” vem justamente do fato de que a seção de um cone de duas folhas por um plano é, em geral, uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole, conforme o plano seccionador forme com o eixo do cone um ângulo maior, igual ou menor do que o ângulo que a geratriz do cone forma com o seu eixo. No caso em questão, o plano da parede é paralelo à geratriz do cone, formando portanto um ângulo nulo, menor do que o ângulo  $\theta$  que a geratriz do cone forma com o seu eixo.

Esse teorema já era conhecido por Apolônio de Perga (séc. III a.C.) e já foi algumas vezes citado na **RPM**.

2. Um tema-chave no ensino médio é o ensino de funções (reais de uma variável real) e seus gráficos. Dentre essas, ninguém pode negar a grande importância das funções polinomiais de 1º e 2º graus, das funções logaritmo e exponencial e das funções trigonométricas. Muitas vezes, porém, queremos sair um pouco da rotina e apresentar outras funções que tenham uma definição simples e estejam ligadas a aplicações práticas. Está aí um interessante exemplo: as funções da forma  $f(x) = k\sqrt{x^2 + d^2}$ , cujo gráfico é um ramo de hipérbole. Aliás, é uma boa ocasião para pensar também nos gráficos de funções da forma  $f(x) = k\sqrt{x^2 - d^2}$  ou  $f(x) = k\sqrt{d^2 - x^2}$ , cujos gráficos são também partes de cônicas (desafio: quais?).

Adaptado do artigo

*A sombra do meu abajur*

José Paulo Q. Carneiro, **RPM** 59.



## A ilha do tesouro

### Dois problemas e duas soluções

#### Problema 1

O problema a seguir foi inspirado numa história do livro *Um, dois, três, ..., infinito* de George Gamow.

Era uma vez dois irmãos aventureiros que encontraram, no baú das lembranças de seu bisavô, o mapa de um tesouro, juntamente com as instruções para localizá-lo.

O tesouro estava numa ilha, cuja localização estava descrita de forma clara; encontrada a ilha, deveriam procurar um campo aberto com um grande espaço arenoso, perfeitamente circular. No exterior do dito círculo encontrariam numerosas palmeiras alinhadas ao longo de uma reta. Deveriam, então, procurar a palmeira com um desenho geométrico no seu tronco e, partindo de sua base, traçar as tangentes à pista circular, chamando de  $T_1$  e  $T_2$  os pontos de tangência. A seguir, deveriam traçar também o diâmetro,  $AM$ , da circunferência fronteira da clareira, perpendicular à reta das palmeiras.

Encontrariam o tesouro enterrado exatamente no ponto de intersecção de  $AM$  com  $T_1T_2$ .

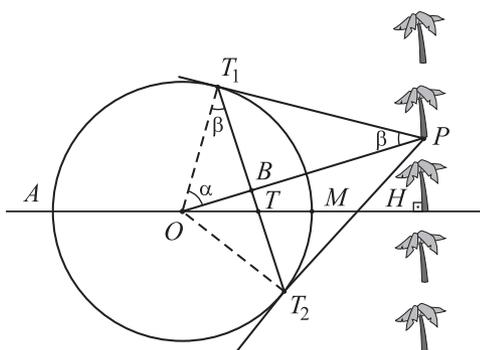
Os jovens viajaram muito contentes até a ilha, levando cordas e outras ferramentas necessárias. Lá estavam a formosa planície, a grande clareira circular e a comprida fila de belas palmeiras. Mas todas as palmeiras



apresentavam figuras geométricas nos seus grossos troncos!

Esse inesperado fato derrubou todos os planos. Não sabiam qual era o ponto inicial e, sem ele, imaginaram que o trabalho seria gigantesco ou impossível. Dessa forma tiveram de voltar com as mãos vazias...

Entretanto, se aqueles aventureiros soubessem um pouco de Geometria, teriam escolhido uma palmeira qualquer da fila, como ponto inicial, e teriam encontrado o tesouro. Vejamos por quê.



Na figura:

$O$  e  $r$  são, respectivamente, o centro e o raio da circunferência fronteira da clareira circular;  $H$  o ponto de intersecção da reta determinada por  $AM$  com a reta das palmeiras;  $P$  o ponto que representa a palmeira escolhida, eleita para iniciar a procura do tesouro;  $B$  o ponto de intersecção de  $OP$  com  $T_1T_2$ ;  $T$  intersecção de  $T_1T_2$  com  $AM$ , ponto onde deveriam cavar para encontrar o tesouro.

Temos então:

Os triângulos retângulos  $OBT_1$  e  $OT_1P$  são semelhantes.

$$\text{Logo, } \frac{\overline{OT_1}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OT_1}}, \text{ ou seja, } r^2 = \overline{OB} \cdot \overline{OP}.$$

Analogamente, os triângulos retângulos  $OBT$  e  $OHP$  são semelhantes, o que implica:

$$\frac{\overline{OT}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OH}}, \text{ ou seja, } \overline{OT} \cdot \overline{OH} = \overline{OB} \cdot \overline{OP}.$$



Assim,  $\overline{OT} \cdot \overline{OH} = r^2$  ou  $\overline{OT} = \frac{r^2}{\overline{OH}}$ , o que mostra que a posição do ponto  $T$  independe do ponto  $P$ , ou seja, independe da palmeira escolhida inicialmente.

### Problema 2

O problema a seguir foi inspirado em um exercício do livro *Polynomials*, de E. J. Barbeau, e foi apresentado a professores do ensino médio, alunos de um curso, de formação continuada, sobre números complexos.

Dois piratas decidem enterrar um tesouro em uma ilha. Escolhem, como pontos de referência, uma árvore e duas pedras. Começando na árvore, medem o número de passos até a primeira pedra. Em seguida, dobram, segundo um ângulo reto, à direita e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem uma marca. Voltam à árvore, medem o número de passos desde a árvore até a segunda pedra, dobram à esquerda, segundo um ângulo reto, e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem outra marca. Finalmente, enterram o tesouro exatamente no ponto médio entre as duas marcas.

Anos mais tarde, os dois piratas voltam à ilha e decidem desenterrar o tesouro, mas, para sua decepção, constatam que a árvore não existe mais (o vento, a chuva e os depredadores a haviam arrancado). Então um dos piratas decide arriscar. Escolhe ao acaso um ponto da ilha e diz: “Vamos imaginar que a árvore estivesse aqui.” Repete então os mesmos procedimentos de quando havia enterrado o tesouro: conta os passos até a primeira pedra, dobra à direita, etc., e encontra o tesouro.

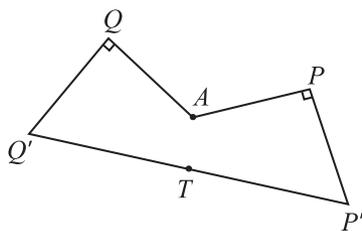
A pergunta é: esse pirata era sortudo ou um matemático?

Mesmo tendo sido apresentado em um curso sobre números complexos, e para “alunos” que tinham bastante experiência – eram professores de Matemática –, o problema da ilha do tesouro causou uma comoção. Na verdade, todos admitiram que, se o curso não fosse sobre números complexos, a nenhum dos presentes teria ocorrido a ideia de resolver esse problema usando a álgebra dos números complexos. E, mesmo depois da sugestão para fazê-lo, quase ninguém conseguiu.



Qual é a relação entre o problema e os números complexos? Bem, tudo se baseia em dois fatos fundamentais:

- 1) no plano complexo, a diferença entre dois complexos traduz o vetor com origem no primeiro ponto e extremidade no segundo; é o que se costuma formular por:  $\overline{AB} = B - A$ ;
- 2) multiplicar um complexo pelo número  $i$  (a “unidade imaginária”) equivale a girá-lo de um ângulo reto positivo.

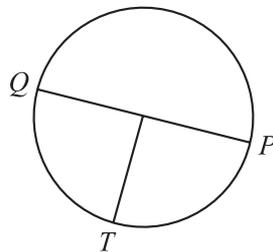


A figura ilustra a situação do problema. Sendo  $A$  a árvore, e  $P$  e  $Q$  as pedras, o tesouro está no ponto  $T$  médio dos pontos  $P'$  e  $Q'$ . Considerando os pontos pertencentes ao plano complexo, não importando onde esteja a origem, tem-se:

$$T = \frac{P' + Q'}{2} = \frac{P - i(P - A) + Q + i(Q - A)}{2} = \frac{P + Q}{2} + i \frac{Q - P}{2}.$$

Observando que  $\frac{P + Q}{2}$  é o ponto médio

de  $PQ$  e que  $Q - P = \overline{PQ}$ , esse resultado não só demonstra que a localização do tesouro independe da posição da árvore (o pirata era um matemático...), como também permite localizá-lo como o terceiro vértice de um dos triângulos retângulos isósceles com hipotenusa  $PQ$ .



Adaptado do artigo

*A ilha do tesouro. Dois problemas e duas soluções*  
 Jesús A. P. Sánchez e José Paulo Q. Carneiro, **RPM** 47.



## Qual é o mesmo a definição de polígono convexo?

Quando pensamos num polígono convexo, imaginamos seus vértices todos apontando para fora, ou seja, que ele não possui vértices reentrantes. Como os dois polígonos da esquerda na figura 1.

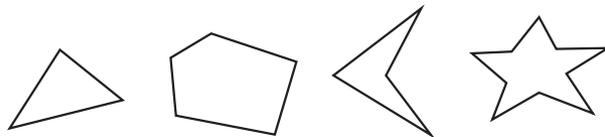


figura 1: Dois polígonos convexos e dois não convexos.

Essa idéia intuitiva necessita, entretanto, uma formulação mais precisa, para poder ser usada com segurança e generalidade. Além disso, há outras maneiras de pensar num polígono convexo. Conforme o contexto, uma dessas definições pode ser mais adequada do que as outras. Por isso é conveniente conhecer as principais alternativas e saber mostrar que elas são equivalentes.

A seguir, daremos três definições diferentes de polígono convexo e provaremos a equivalência entre elas.

Chamamos polígono a uma linha poligonal fechada sem auto-interseções, isto é, cada lado tem apenas um ponto comum com o lado anterior e com o seguinte, mas não com os demais.

Às vezes, a palavra “polígono” também designa a região do plano limitada por essa linha poligonal fechada



sem auto-interseções. Por exemplo, quando falamos da área de um polígono, é claro que nos referimos à região poligonal, não à linha que a limita.

Um subconjunto  $F$  do plano chama-se uma *figura plana convexa* quando, para quaisquer dois pontos  $X$  e  $Y$  em  $F$ , o segmento de reta  $XY$  está inteiramente contido em  $F$ .

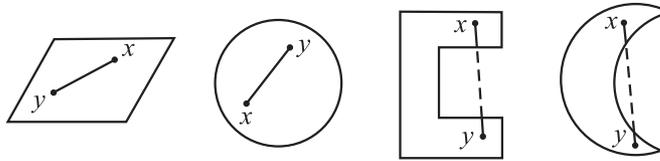


figura 2: Duas figuras planas convexas e duas não convexas.

### Primeira definição

Um polígono diz-se convexo quando a região por ele limitada é uma figura plana convexa.

Segue-se desta definição que toda diagonal de um polígono convexo está inteiramente contida na região por ele limitada.

Para a segunda definição, lembremos que toda reta  $r$  decompõe o plano em duas regiões que têm  $r$  como fronteira comum. Chamaremos essas regiões as *margens* de  $r$ .

As margens de uma reta são figuras planas convexas. Se os pontos  $X$  e  $Y$  estão em margens opostas da reta  $r$ , o segmento de reta  $XY$  corta  $r$ .

Diz-se que  $r$  é uma *reta de apoio* do polígono  $P$  quando  $P$  tem pelo menos um ponto em comum com  $r$  e situa-se inteiramente numa das margens de  $r$ .

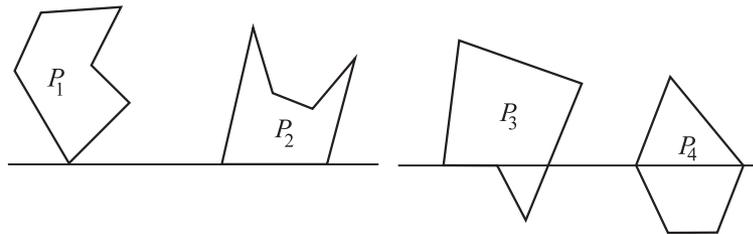


figura 3:  $r$  é a reta de apoio dos polígonos  $P_1$  e  $P_2$  mas não de  $P_3$  e  $P_4$ .



### Segunda definição

Um polígono chama-se convexo quando a reta que contém qualquer dos seus lados é uma reta de apoio.

Por exemplo, dos polígonos na figura 3, apenas  $P_4$  é convexo.

Para formular a terceira definição de polígono convexo, definimos um *ziguezague*  $ABCD$  como uma poligonal com três lados,  $AB$ ,  $BC$  e  $CD$ , dispostos de modo que  $AB$  e  $CD$  se situem em margens opostas da reta (que contém o segmento)  $BC$ .

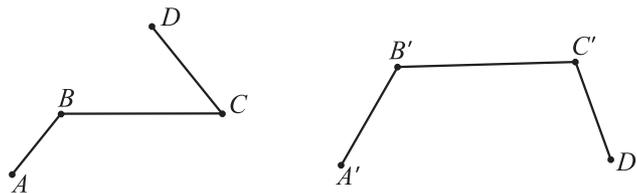


figura 4: A poligonal  $ABCD$  é um ziguezague mas  $A'B'C'D'$  não é.

### Terceira definição

Um polígono diz-se convexo quando não contém ziguezagues.

Notemos que se  $ABCD$  é um ziguezague contido no polígono  $P$ , então um dos vértices  $B$ ,  $C$  é saliente e o outro reentrante.

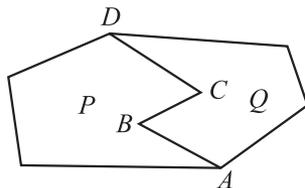


figura 5: No ziguezague  $ABCD$ , o vértice  $C$  é saliente para o polígono  $P$  e reentrante para  $Q$ . O contrário ocorre com o vértice  $B$ .

Para demonstrar a equivalência entre estas três definições de polígono convexo, usaremos a noção de “ponta” de um polígono.

Sejam  $A$ ,  $B$ ,  $C$  vértices consecutivos do polígono  $P$ . Diz-se que  $B$  é uma *ponta* de  $P$  quando o segmento  $AC$  é uma diagonal interna desse polígono.

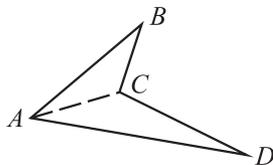


figura 6: Os vértices  $B$  e  $D$  (mas não  $A$  e  $C$ ) são pontas de  $ABCD$ .



## Lema

Todo polígono tem pelo menos uma ponta.

## Demonstração

Um polígono  $P$ , de  $n$  lados, decompõe-se, mediante diagonais internas, em  $n - 2$  triângulos justapostos (RPM 18, p. 36). Cada um dos  $n$  lados de  $P$  pertence a pelo menos um desses  $n - 2$  triângulos. Pelo princípio da casa dos pombos (RPM 8, p. 21) há 2 lados de  $P$  no mesmo triângulo. O vértice comum a esses dois lados é uma ponta de  $P$ .

O teorema seguinte estabelece a equivalência entre as três definições de polígono convexo dadas acima.

## Teorema 1

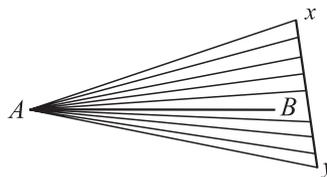
Cada uma das seguintes afirmações a respeito de um polígono  $P$  implica, as demais:

- 1) A região limitada por  $P$  é uma figura plana convexa;
- 2) A reta que contém qualquer lado de  $P$  é uma reta de apoio;
- 3)  $P$  não possui ziguezagues.

## Demonstração

Provaremos as implicações  $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)$ .

$1) \Rightarrow 2)$ . Admitindo 1), suponhamos, por absurdo, que 2) seja falsa, isto é, que exista um lado  $AB$  do polígono  $P$  e pontos  $X, Y$  da região  $F$  limitada por  $P$  situados em margens opostas da reta  $AB$ , como na figura 7.



Sendo  $F$  convexa, todos os pontos do segmento  $XY$ , e daí todos os pontos do triângulo  $AXY$ , obtidos ligando  $A$  aos pontos de  $XY$ , estão contidos em  $F$ . Então  $AB$  não é lado de  $P$ . Contradição.

$2) \Rightarrow 3)$ . Se  $ABCD$  é um ziguezague,  $AB$  e  $CD$  estão em margens opostas da reta  $BC$ . Portanto, um polígono onde a reta que contém qualquer dos seus lados é de apoio não pode conter ziguezagues.

$3) \Rightarrow 1)$ . Para provar esta última implicação suponhamos, por absurdo, que exista um polígono  $P$ , com  $n$  lados, que não contém



zigzagues mas a região  $F$ , por ela limitada, não é uma figura plana convexa. Tomemos  $P$  de modo que  $n$  seja o menor possível. Então  $3) \Rightarrow 1)$  para polígonos com menos de  $n$  lados. Pelo lema, existem vértices consecutivos  $L, A, B, C, D$  de  $P$  tais que  $B$  é uma ponta. A diagonal  $AC$  decompõe  $P$  em dois polígonos justapostos: o triângulo  $ABC$  e um polígono  $Q$ , de  $n - 1$  lados, que não contém zigzagues, logo limita uma figura plana convexa  $G$ .

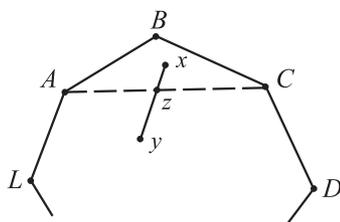


figura 8: O polígono  $P$  decomposto no triângulo  $ABC$  e no polígono  $Q$ , de  $n - 1$  lados.

Assim, para provar que  $F$  é uma figura plana convexa, basta tomar um ponto  $X$  no triângulo  $ABC$ , um ponto  $Y$  na região  $G$  e mostrar que o segmento de reta  $XY$  está contido em  $F$ . Como já vimos que  $1) \Rightarrow 2)$ , sabemos que  $AC$  é uma reta de apoio para  $Q$ , logo  $X$  e  $Y$  estão em margens opostas de  $AC$ . Além disso, como  $LABC$  e  $ABCD$  não são zigzagues,  $X$  e  $Y$  estão na mesma margem em relação às retas  $AB$  e  $BC$ . Tudo isto significa que o segmento  $XY$  corta a reta  $AC$  mas não as retas  $AB$  ou  $BC$ . Noutras palavras, o segmento  $XY$  sai do triângulo  $ABC$  por um ponto  $Z$  do segmento  $AC$ . Então  $XZ$  está contido no triângulo  $ABC$  e  $ZY$  está contido na região  $G$ , logo  $XY$  está contido na região  $F$ , como queríamos demonstrar.

Para finalizar, breves observações sobre as definições acima propostas:

1. A primeira definição é a que melhor se adapta aos padrões atuais da Matemática, tanto Pura, como Aplicada. Ela se aplica literalmente a figuras sólidas com um número qualquer de dimensões. Dela resulta facilmente que a interseção de duas ou mais figuras convexas é uma figura convexa. Por isso é simples deduzir dela que um polígono é convexo se, e somente se, tem exatamente dois pontos em comum com qualquer reta que passa pelo seu interior. (Isto seria uma quarta definição de polígono convexo.)



2. A segunda definição também se estende a poliedros em espaços com um número qualquer de dimensões. Ela permite caracterizar um polígono convexo como o conjunto das soluções  $(x, y)$  de um sistema de desigualdades lineares do tipo  $ax + by < c$ . Por isso desempenha papel fundamental em Programação Linear.
3. As duas primeiras definições têm caráter global enquanto a terceira é nitidamente local. Para verificar se um dado polígono é convexo no sentido das duas primeiras definições é necessário examinar (várias vezes) todos os seus lados ao mesmo tempo. Já na terceira definição, para cada lado, olha-se apenas para o lado à sua esquerda e para o lado à sua direita. Do ponto de vista computacional, isto é bem mais simples. Por outro lado, a não existência de zigzagues só faz sentido no plano. Além disso, trata-se de uma hipótese da qual, em que pese seu grande apelo geométrico, é difícil deduzir conseqüências. (Compare  $3 \Rightarrow 1$ ) com as outras implicações.)

Adaptado do artigo

*Qual é mesmo a definição de polígono convexo?*

Elon Lages Lima, **RPM** 21.



## A solução de Tartaglia para a equação do 3º grau e a emergência dos números complexos

### Introdução

A história da resolução da equação de terceiro grau é muito pitoresca, plena de lances dramáticos, paixões e disputas pela fama e a fortuna que seu achado poderia trazer a seus autores.

Uma das personagens dessa história é **Niccolò Fontana** (1500-1557 aprox.). Em 1512 os franceses saquearam Brescia, sua cidade natal. Sua mãe buscou refúgio para o filho na igreja, mas os soldados também invadiram o santuário, e a criança foi ferida no rosto. O ferimento lhe causou uma gagueira permanente, que lhe valeu o apelido de **Tartaglia** (gago, em italiano), pelo qual se tornou conhecido. Ele não foi o primeiro a obter o método de resolução dessas equações; **Scipione del Ferro** (1465-1562 aprox.), que foi professor na Universidade de Bolonha e cuja biografia é pouco conhecida, foi o verdadeiro descobridor. Antes de morrer, del Ferro ensinou seu método a dois discípulos, **Annibale della Nave** - seu futuro genro e sucessor na cátedra em Bolonha - e **Antônio Maria Fior** (ou Floridus, em latim).

Em 1535 houve uma disputa matemática entre Fior e Tartaglia. Tais confrontos intelectuais não eram infrequentes na época e, muitas vezes, a permanência de um matemático numa cátedra dependia de seu bom



desempenho nesses encontros. Cada um dos adversários propôs ao outro trinta problemas e foi combinado que o perdedor deveria pagar trinta banquetes ao ganhador. Tartaglia preparou questões variadas, mas todos os problemas propostos por Fior implicavam equações do tipo  $X^3 + aX = b$ . Precisamente na noite de 12 para 13 de fevereiro, Tartaglia conseguiu descobrir o método de resolução de tais equações e, na hora do confronto, verificou-se que Tartaglia tinha resolvido todas as questões propostas por Fior, enquanto este não tinha conseguido resolver a maioria das questões submetidas por Tartaglia. Declarado vencedor, Tartaglia voluntariamente renunciou aos trinta banquetes.

A notícia do triunfo de Tartaglia logo se espalhou e chegou aos ouvidos de **Girolamo Cardano** (1501-1576), que, na época, ocupava uma cadeira de medicina na Universidade de Pavia e era membro do Colégio Médico de Milão. De todos os participantes da nossa história, talvez seja Cardano o mais enigmático, aquele cuja vida é mais pitoresca e, certamente, que teve uma formação mais universal.

Para termos uma idéia de quão extenso e profundo era seu conhecimento, citamos a seguir os comentários de Gabriel Naudé (1600-1653), que publicou a autobiografia de Cardano pela primeira vez em 1643:

*Não somente era ele inquestionavelmente um médico notável, como foi também provavelmente o primeiro e único homem a se distinguir em todas as ciências ao mesmo tempo. É uma das ilustrações da Natureza daquilo que um homem é capaz de atingir. Nada de significativo lhe era desconhecido em filosofia, medicina, astronomia, matemática, história, metafísica ou as ciências sociais, ou em outras áreas mais remotas do conhecimento. Ele também errava, é claro, isto é apenas humano; é maravilhoso, porém, quão raramente ele errava.*

Na época da descoberta de Tartaglia, Cardano gozava de boa posição em Milão e o convidou a sua casa. Uma vez lá, com muita insistência Cardano conseguiu que lhe fosse revelado o segredo da resolução das equações do terceiro grau.

Tartaglia consentiu em lhe ensinar a regra de resolução (embora não lhe ensinasse a demonstração da mesma), sob forma de versos, em troca



do juramento solene de que Cardano jamais publicaria esse segredo.

Conhecendo um método de resolução, Cardano procurou – e achou – uma demonstração que o justificasse. De posse da solução, Cardano deve ter se sentido fortemente tentado a publicá-las. Em 1544 fez uma viagem a Florença e, no caminho, visitou Annibale della Nave, em Bologna, que lhe mostrou um manuscrito de del Ferro que continha a famosa regra de Tartaglia, manuscrito este que ainda se conserva. Aparentemente, ao saber que a fórmula de Tartaglia existia já desde trinta anos antes, Cardano se sentiu desobrigado de cumprir seu juramento e publicou, em 1545, em Nuremberg, uma obra intitulada *Ars Magna*, que o tornou verdadeiramente famoso em todo o continente. Nas palavras de C. Boyer, “ele provavelmente era o matemático mais competente da Europa”. Nessa obra aparecem, pela primeira vez, as regras de resolução das equações do terceiro e quarto graus. A seu favor, podemos dizer que Cardano não esquece de fazer as devidas atribuições de mérito aos respectivos descobridores.

A seguir, faremos uma análise do método que Tartaglia confiou a Cardano.

### Os Versos de Tartaglia

Como dissemos acima, Tartaglia comunicou a Cardano o segredo da sua descoberta por meio de versos. Tal idéia não é tão estranha quanto pode parecer a princípio; devemos lembrar que, na época, os autores não dispunham ainda de uma notação adequada para tratar as equações em sua generalidade e não podiam, portanto, expressar seus métodos resumidamente mediante fórmulas, como fazemos hoje em dia.

A seguir, reproduzimos os versos na sua versão original, tal como transcritos na edição de 1554 dos *Quesiti et inventiones diverse de Tartaglia*.

1. Quando che'l cubo con le cose appreso  
Se aggaglia a qualche número discreto  
Trovati due altri differenti in esso
2. Depoi terrai questo por consueto  
Che'l lor prodotto sempre sia eguale  
Al terzo cubo delle cose neto



3. El resíduo poi suo generale  
Delli lor lati cubi ben sostratti  
Verra la tua cosa principale
4. In el secondo de coiesti aiti  
Quando che'l cubo restasse lui solo  
Tu osserverai quest'altri contratti
5. Del número farai due, tal part'a volo  
Cha l'uno e l'altro si produca schietto  
El terzo delle cose in stelo
6. Delle qual poi, per commun precetto  
Torrai li lati cubi incieme gionti  
Et cotal somma sera il tuo concetto
7. El terzo poi de questi nostri conti  
Se solve con secondo, se ben guardi  
Che ser natura son quasi congiontri
8. Questi trovai, et non con passi tardi  
nel mille cinquecento quatro et trinta  
Nella città dal mare intorno centa.

Uma tradução para o português ficaria, mais ou menos, assim:

1. Quando o cubo com a coisa em apreço  
Se igualam a qualquer número discreto  
Acha dois outros diferentes nisso
2. Depois terás isto por consenso  
Que seu produto seja sempre igual  
Ao cubo do terço da coisa certo
3. Depois, o resíduo geral  
Das raízes cúbicas subtraídas  
Será tua coisa principal
4. Na segunda destas operações,  
Quando o cubo estiver sozinho  
Observarás estas outras reduções



5. Do número farás dois, de tal forma  
Que um e outro produzam exatamente  
O cubo da terça parte da coisa
6. Depois, por um preceito comum  
Toma o lado dos cubos juntos  
E tal soma será teu conceito
7. Depois, a terceira destas nossas contas  
Se resolve como a segunda, se observas bem  
Que suas naturezas são quase idênticas
8. Isto eu achei, e não com passo tardo  
No mil quinhentos e trinta e quatro  
Com fundamentos bem firmes e rigorosos  
Na cidade cingida pelo mar

Analisaremos, a seguir, esses versos numa linguagem acessível ao leitor contemporâneo. Antes de tudo, é conveniente lembrar que Tartaglia (assim como depois faria também Cardano) não utiliza coeficientes negativos em suas equações. Então, em vez de uma equação geral do terceiro grau, ele deve considerar três casos possíveis:

$$x^3 + ax = b$$

$$x^3 = ax + b$$

$$x^3 + b = ax.$$

Tartaglia chama cada um desses casos de *operações* e afirma que irá considerar, de início, equações do primeiro tipo: “*cubo e coisa igual a número*”. No quarto verso começa a considerar o segundo tipo “*quando o cubo estiver sozinho*” e, no sétimo, faz referência ao terceiro caso.

Vejam agora como se propõe a resolver o primeiro caso, nos três versos iniciais, para depois justificar seu método, de uma forma simples.

O *número* se refere ao termo independente, que nós denotamos aqui por  $b$ . Quando diz “*acha dois outros diferentes nisso*”, está sugerindo tomar duas novas variáveis cuja diferença seja precisamente  $b$ , i.e., escolher  $U$  e  $V$  tais que:

$$U - V = b.$$



A frase “... que seu produto seja sempre igual a cubo da terça parte da coisa” significa que  $U$  e  $V$  devem verificar:

$$UV = \left(\frac{a}{3}\right)^3.$$

Finalmente, “o resíduo geral das raízes cúbicas subtraídas será tua coisa principal” significa que a solução estará dada por

$$x = \sqrt[3]{U} - \sqrt[3]{V}.$$

Os outros dois casos carecem de interesse para o leitor moderno, uma vez que podemos reduzi-los ao primeiro, mudando termos de um membro a outro da equação.

A frase final “... a cidade cingida pelo mar” é uma referência a Veneza, onde realizou suas descobertas.

### A Resolução da Equação do Terceiro Grau

Nesta seção veremos como justificar a fórmula de Tartaglia para resolver equações do terceiro grau. Naturalmente, utilizaremos métodos e notações modernos, o que nos permitirá dar uma exposição relativamente simples.

Vamos considerar uma equação do terceiro grau escrita na forma:

$$x^3 + ax = b.$$

para compará-la com a *primeira destas operações . . . cubo e coisa igual a número*, discutida nos três primeiros versos de Tartaglia. Na verdade, há um caminho muito simples para achá-la. Começemos por lembrar a fórmula do cubo de um binômio:

$$(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3.$$

Pondo em evidência o produto  $uv$ , temos:

$$(u - v)^3 = -3uv(u - v) + (u^3 - v^3),$$

isto é,

$$(u - v)^3 + 3uv(u - v) = u^3 - v^3.$$

Se podemos escolher, de alguma forma,  $u$  e  $v$  de modo que verifiquem:

$$uv = a/3$$

$$u^3 - v^3 = b,$$



a relação acima se transformará em:

$$(u - v)^3 + a(u - v) = b$$

o que significa que  $x = u - v$  será uma solução da equação dada.

Em outras palavras, se conseguirmos achar  $u$  e  $v$  que sejam soluções do sistema acima, tomando  $x = u - v$  obter-se-á uma solução da equação proposta. Resta-nos então o problema de resolver o sistema. Para isso, observemos que, elevando ao cubo a primeira equação, ela se transforma em:

$$u^3 v^3 = (a/3)^3$$

$$u^3 - v^3 = b.$$

Finalmente, fazendo  $u^3 = U$  e  $v^3 = V$ , temos:

$$UV = (a/3)^3$$

$$U - V = b.$$

Isso é muito fácil de resolver;  $U$  e  $-V$  são as raízes da equação:

$$X^2 - bX + (-a/3)^3 = 0$$

que são dadas por:

$$X = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4\left(\frac{-a}{3}\right)^3}}{2} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}.$$

Podemos tomar uma dessas raízes como sendo  $U$  e a outra como  $-V$ , logo temos  $u = \sqrt[3]{U}$  e  $v = \sqrt[3]{-V}$ . Portanto, obtemos precisamente a solução enunciada por Tartaglia:

$$x = \sqrt[3]{U} - \sqrt[3]{-V}.$$

Mais explicitamente, substituindo  $U$  e  $V$  pelos seus respectivos valores, resulta a conhecida fórmula que, nos textos, é chamada de *fórmula de Cardano* ou *de Tartaglia*:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

Uma observação final: a equação geral do terceiro grau, que podemos escrever na forma:



$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$$

pode-se reduzir ao caso acima, mediante a mudança de variável  $x = y - (a_1/3)$ . Aliás, essa redução era conhecida por Tartaglia, mas não por Fior, e foi justamente esse fato que determinou a vitória do primeiro. Isso significa que, na verdade, Tartaglia conhecia um método geral para resolver *qualquer* equação do terceiro grau.

### A emergência dos números complexos

Os números complexos desempenham um papel sumamente importante nos mais diversos ramos da Matemática e, através destes, em muitas das aplicações a outras áreas do conhecimento.

Em geral, o estudante se depara com eles, pela primeira vez, ainda no curso secundário e sua introdução é justificada pela necessidade de resolver equações de segundo grau com discriminante negativo. Isso cria uma falsa impressão, já que, historicamente, não foram as equações de segundo grau que levaram à introdução dos números complexos.

Neste texto analisaremos essa questão e alguns outros aspectos ligados ao desenvolvimento do assunto.

O fato de que um número negativo não tem raiz quadrada parece ter sido sempre claro para os matemáticos que se depararam com a questão.

As equações de segundo grau apareceram na Matemática já nas tabuletas de argila da Suméria, aproximadamente 1700 anos antes de Cristo e, ocasionalmente, levaram a radicais de números negativos; porém, não foram elas, em momento algum, que sugeriram o uso de números complexos.

Em rigor, uma equação era vista como a formulação matemática de um problema concreto; assim, se no processo de resolução aparecia uma raiz quadrada de um número negativo, isso era interpretado apenas como uma indicação de que o problema originalmente proposto não tinha solução. Como veremos adiante, foram só as equações de terceiro grau que impuseram a necessidade de trabalhar com esses números.

Vejamos inicialmente alguns antecedentes. Na *Arithmetica*, de Diophanto, aproximadamente no ano de 275 d.C. ele considera o seguinte problema:



Um triângulo retângulo tem área igual a 7 e seu perímetro é de 12 unidades. Encontre o comprimento dos seus lados.

Chamando de  $x$  e  $y$  o comprimento dos catetos desse triângulo, temos, na nossa notação atual:

$$\frac{1}{2}xy = 7; \quad x^2 + y^2 = (12 - x - y)^2.$$

Substituindo  $y$  em função de  $x$ , obtemos a equação

$$24x^2 - 172x + 336 = 0.$$

Nesse ponto Diophanto observa que só poderia haver solução se  $(\frac{172}{2})^2 \geq 24 \times 336$ . Nesse contexto, é claro que não há necessidade alguma de introduzir um sentido para a expressão  $\sqrt{-167}$ , sendo  $-167$  o discriminante da equação.

Na verdade, o primeiro registro de um radical de um número negativo é um pouco anterior: ele aparece na *Estereometria* de Heron, matemático grego do período Alexandrino, publicada aproximadamente em 75 d.C. Num cálculo sobre o desenho de uma pirâmide surge a necessidade de avaliar  $\sqrt{81-144}$ . A questão parece não causar nenhum problema simplesmente porque logo em seguida os números apresentam-se trocados:  $\sqrt{144-81}$ , resultando  $\sqrt{63}$ , que é calculado como aproximadamente igual a  $7\frac{15}{16}$ .

Encontram-se novas referências à questão na Matemática indiana. Aproximadamente no ano de 850 d.C, o matemático indiano Mahavira afirma:

... como na natureza das coisas um negativo não é um quadrado, ele não tem, portanto, raiz quadrada.

Já no século XII, o famoso matemático Bhaskara (1114-1185 aprox.) escreve:

O quadrado de um afirmativo é afirmativo; e a raiz quadrada de um afirmativo é dupla: positiva e negativa. Não há raiz quadrada de um negativo; pois ele não é um quadrado.



Também na Matemática européia aparecem observações dessa natureza; Luca Paccioli, na sua *Summa de arithmetica, geométrica, proportioni et proportionalita*, publicada em 1494, escreve que a equação

$x^2 + c = bx$  é solúvel somente se  $\frac{1}{4}b^2 \geq c$ , e o matemático francês

Nicolas Chuquet (1445-1500 aproximadamente) faz observações semelhantes sobre “soluções impossíveis” num manuscrito, não publicado, de 1484.

O próprio Cardano se deparou com esse tipo de questões e, embora mantivesse a atitude dos seus contemporâneos, no sentido de entender que raízes de números negativos indicavam apenas a não-existência de soluções de um determinado problema, pelo menos em um caso ele deu um passo a mais. No Capítulo 37 do *Ars Magna*, ele considera o problema de dividir um segmento de comprimento 10 em duas partes cujo produto seja 40.



Se chamamos de  $x$  o comprimento de uma das partes, a outra terá comprimento  $10 - x$ , e a condição do problema se traduz na equação:

$$x(10 - x) = 40.$$

Isso leva à equação  $x^2 - 10x + 40 = 0$ , cujas soluções são  $5 \pm \sqrt{-15}$ . Cardano reconhece que o problema dado não tem solução mas, talvez a título de curiosidade, observa que, trabalhando com essas expressões como se fossem números, *deixando de lado as torturas mentais envolvidas e multiplicando  $5 + \sqrt{-15}$  por  $5 - \sqrt{-15}$ , obtém-se  $25 - (-15)$ , que é igual a 40.*

Em consequência, ele chama essas expressões de *raízes sofisticadas* da equação e diz, a respeito delas, que *são tão sutis quanto inúteis*.

### A necessidade dos números complexos

Raphael Bombelli (1526-1573) era um admirador da *Ars Magna* de Cardano, mas achava que seu estilo de exposição não era claro (ou, em suas próprias palavras, *ma nel dire fù oscuro*). Decidiu, então, escrever



um livro expondo os mesmos assuntos, mas de forma tal que um principiante pudesse estudá-los sem necessidade de nenhuma outra referência. Publicou *l'Algebra*, em três volumes, em 1572, em Veneza, obra que viria a se tornar muito influente. No capítulo II dessa obra, ele estuda a resolução de equações de grau não superior a quatro. Em particular na página 294 e nas seguintes, ele considera a equação  $x^3 = 15x + 4$ . Ao aplicar a fórmula de Cardano para o cálculo de uma raiz, ele obtém:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} .$$

Seguindo Cardano, ele também chama essa expressão de *sofística*, mas, por outro lado, ele percebe que  $x = 4$  é, de fato, uma raiz da equação proposta.

Assim, pela primeira vez, nos deparamos com uma situação em que, apesar de termos radicais de números negativos, existe verdadeiramente uma solução da equação proposta. É necessário, então, compreender o que está acontecendo.

Bombelli concebe então a possibilidade de que exista uma expressão da forma  $a + \sqrt{-b}$  que possa ser considerada como raiz cúbica de  $2 + \sqrt{-121}$  i.e., que verifique  $(a + \sqrt{-b})^3 = 2 + \sqrt{-121}$ . A forma em que ele calcula essa raiz é um tanto peculiar; ele assume que a raiz cúbica de  $2 - \sqrt{-121}$  seja da forma  $a - \sqrt{-b}$ . Como ele sabe que 4 deve ser raiz da equação, necessariamente  $a + \sqrt{-b} + a - \sqrt{-b} = 4$ . Nesse ponto, felizmente, as quantidades não existentes se cancelam e obtemos  $a = 2$ . Com esse resultado, é muito fácil voltar à equação  $(a + \sqrt{-b})^3 = 2 + \sqrt{-121}$  e deduzir que  $b = 1$ . Assim, ele obtém que  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$  e que:

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

é uma solução da equação dada.

Bombelli percebeu claramente a importância desse achado. Ele diz:

*Eu achei uma espécie de raiz cúbica muito diferente das outras, que aparece no capítulo sobre o cubo igual a uma quantidade e um número.*



*... A princípio, a coisa toda me pareceu mais baseada em sofismas que na verdade, mas eu procurei até que achei uma prova... .*

*Isto pode parecer muito sofisticado mas, na realidade, eu tinha essa opinião, e não pude achar a demonstração por meio de linhas [i.e. geometricamente], assim, tratarei da multiplicação dando as regras para mais e menos.*

Ele utiliza a expressão *più di meno* para se referir ao que nós denotaríamos como  $+i$  e *meno di meno* para  $-i$ . Ele enuncia então o que chama de regras do produto, que citamos abaixo junto com sua tradução na nossa simbologia:

Più via più di meno fa più di meno,	$+. (+i) = +i$
Meno via più di meno fa meno di meno,	$-.( +i) = -i$
Più via meno di meno fa meno di meno,	$+. (-i) = -i$
Meno via meno di meno fa più di meno,	$-.( -i) = +i$
Più di meno via più di meno fa meno,	$(+i).( +i) = -$
Meno di meno via più di meno fa più,	$(-i).( +i) = +$
Meno di meno via meno di meno fa meno.	$(-i).( -i) = -$

E interessante notar que Bombelli se deparava com a dificuldade adicional de não dispor de uma boa notação. Ele utilizava  $p$  (plus) para indicar a soma;  $m$  (minus) para a subtração;  $R$  (radix) para raiz quadrada e  $R^3$  para a raiz cúbica. Também não dispunha de parênteses; nos seus manuscritos sublinhava expressões para indicar quais os termos afetados por um radical. Assim, por exemplo, a expressão  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$  era escrita na forma  $R^3|2pR|0-121||$ .

Note que, como não escrevia diretamente números negativos, ele escreveu  $-121$  como  $0 - 121$ . Dessa forma, a solução da equação discutida acima aparecia como:  $R^3|2pR|0-121||pR^3|2mR|0-121||$ .

### Progressos ulteriores

Faremos aqui um pequeno resumo da evolução dos números complexos, para que o leitor tenha uma visão global da história do



assunto. Começaremos listando alguns progressos na notação para depois nos ocuparmos da evolução dos conhecimentos.

- O símbolo  $\sqrt{-1}$  foi introduzido em 1629 por Albert Girard.
- O símbolo  $i$  foi usado pela primeira vez para representar  $\sqrt{-1}$  por Leonhard Euler em 1777, apareceu impresso pela primeira vez em 1794 e se tornou amplamente aceito após seu uso por Gauss em 1801.
- Os termos *real* e *imaginário* foram empregados pela primeira vez por René Descartes em 1637.
- O expressão número *complexo* foi introduzida por Carl Friederich Gauss em 1832.

Como observamos na seção anterior, a partir do trabalho de Bombelli, os números complexos começaram a ser utilizados devido a sua óbvia utilidade para resolver equações de terceiro grau mas, ao mesmo tempo, era claro que tais números não poderiam existir. A primeira tentativa de legitimação, via uma “interpretação geométrica”, é devida a **John Wallis** (1616-1703), contemporâneo de Newton e professor na Universidade de Oxford. Em 1673 ele publicou um tratado intitulado *Álgebra*, em cujo capítulo LXVI discute a impossibilidade da existência de quantidades imaginárias e compara essa questão com a da existência de quantidades negativas.

Essas quantidades imaginárias (como são freqüentemente chamadas) surgem das supostas raízes de um quadrado negativo (quando aparecem) e se considera que implicam que o caso proposto é impossível.

E assim é, de fato, no sentido estrito do que foi proposto. Pois não é possível que qualquer número (negativo ou afirmativo), multiplicado por si mesmo, possa produzir (por exemplo)  $-4$ . Pois sinais iguais (tanto  $+$  quanto  $-$ ) produzirão  $+$ ; e portanto não  $-4$ .

Mas também é impossível que qualquer quantidade (embora não um suposto quadrado) possa ser negativa. Pois não é possível que qualquer magnitude possa ser menos que nada, ou qualquer número menor que nada.

Porém, não é esta suposição (das quantidades negativas) nem inútil nem absurda, quando corretamente compreendida. E, embora para a simples notação algébrica representa uma quantidade menor do que



nada, quando se trata de uma aplicação física, denota uma quantidade tão real como se o sinal fosse +; mas interpretada no sentido contrário.

Depois de considerar diversos exemplos de números negativos interpretados em termos de segmentos sobre uma reta orientada, ele tenta uma interpretação para as quantidades imaginárias:

Suponhamos que num local ganhamos do mar 30 acres, mas perdemos em outro local 20 acres: se agora formos perguntados quantos acres ganhamos ao todo a resposta é 10 acres, ou +10 (pois  $30 - 20 = 10$ ). ... Mas se num terceiro local perdemos mais 20 acres, a resposta deve ser -10 (pois  $30 - 20 - 20 = -10$ ) ... Mas agora, supondo que esta planície negativa de -1600 *square perches* [20 acres correspondem a 1600 *square perches*, uma outra medida inglesa da época] tem a forma de um quadrado, não devemos supor que este quadrado tem um lado? E, assim, qual será esse lado?

Não podemos dizer que é 40, nem -40 ... Mas sim que é  $\sqrt{-1600}$  (a suposta raiz de um quadrado negativo) ou  $10\sqrt{-16}$  ou  $20\sqrt{-4}$  ou  $40\sqrt{-1}$ .

Como era de se esperar, essa interpretação não teve uma grande acolhida entre seus contemporâneos e nenhuma repercussão posterior.

Notemos que, até aqui, nada garante que raízes cúbicas - ou, em geral, raízes  $n$ -ésimas de complexos - sejam, de fato, complexos. Tal como assinala M. Kline, no começo do século XVIII, a maioria dos matemáticos ainda acreditava que raízes de diferente ordem de números complexos levariam à introdução de diferentes tipos de complexos.

**Jean Le Rond d'Alembert** (1717-1783), após estudar Direito e Medicina, decidiu dedicar sua vida à Matemática. Trabalhou em álgebra, cálculo e suas aplicações, equações diferenciais ordinárias e parciais, funções de variável complexa, mecânica e dinâmica. Em 1747 publicou *Refléxions sur la cause générale des vents*, em que afirmou que toda expressão construída algebricamente a partir de um número complexo (onde incluía também a extração de raízes) é da forma  $a + b\sqrt{-1}$ . Não formulou uma prova satisfatória no caso de expressões da forma  $(a + bi)^{c+di}$ , tarefa que seria completada por Euler.



D'Alembert foi amigo de Voltaire e colaborou com diversos artigos para a *Enciclopédie*, mas manteve nessa um discreto silêncio sobre os números complexos.

**Roger Cotes** (1682-1716) foi um jovem professor no famoso Trinity College de Cambridge e, após sua prematura morte, dele disse Newton: *Se Cotes tivesse vivido, teríamos aprendido alguma coisa*. Em 1714 ele obteve um importante resultado, relacionado com a obtenção de raízes  $n$ -ésimas da unidade que, na notação moderna, poderíamos explicitar como:

$$\log_e(\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi) = i\phi.$$

Isso poderia ter levado à famosa “relação de Euler”:

$$\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi = e^{i\phi}.$$

que, por sua vez, implica a “fórmula de De Moivre”:

$$(\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi)^n = \cos(n\phi) + i\operatorname{sen}(n\phi)$$

o que resolveria o problema de achar raízes.

Porém, o caminho foi outro. **Abraham De Moivre** (1667-1754) nasceu na França, mas viveu na Inglaterra a partir dos dezoito anos. Estudou Matemática sozinho, após ler os *Principia* de Newton, chegando a se tornar membro da Royal Society e das academias de Paris e Berlim. Seu trabalho versou fundamentalmente sobre trigonometria, probabilidade e cálculo de anuidades. Em 1722, utilizando fatos que já havia publicado em 1707, ele obteve um resultado que implicou a fórmula que leva seu nome, embora tenha se limitado a casos particulares e nunca tenha chegado a enunciar ou demonstrar a fórmula no caso geral.

Essa tarefa coube a **Leonhard Euler** (1707-1783), considerado o mais prolífico matemático de todos os tempos. Numa carta endereçada a Jean Bernoulli, datada de 18 de outubro de 1740, ele afirma que  $y = 2 \cos\phi$  e  $y = e^{ix} + e^{-ix}$  eram ambas soluções da mesma equação diferencial (o que reconheceu através do desenvolvimento em série das soluções) e que, portanto, deviam ser iguais. Publicou esse resultado em 1743; explicitamente:

$$\cos\phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}.$$



Em 1748 ele redescobriu o resultado de Cotes, demonstrou a fórmula de De Moivre e estendeu sua validade para todo expoente  $n$  real. Com isso, a existência de raízes no campo complexo ficou definitivamente estabelecida.

Obviamente, Euler compreendia e utilizava muito bem os números complexos. O fato de ele próprio ter grandes dúvidas quanto a sua legitimidade ilustra claramente o status desse corpo numérico na época. Em *Vollständige Anleitung zur Algebra*, publicada primeiro em russo, em 1768-69, e depois em alemão, em 1770, que se tornou uma referência clássica nessa área nos dois séculos seguintes, Euler escreve:

Uma vez que todos os números concebíveis são maiores do que 0, ou menores do que 0 ou iguais a 0, é claro que a raiz quadrada de um número negativo não pode ser incluída entre os números possíveis. Consequentemente, devemos dizer que esses são números impossíveis. E essa circunstância nos conduz a tais números, que por sua natureza são impossíveis, e que são chamados costumeiramente de imaginários, pois eles só existem na imaginação.

### A representação gráfica

A representação geométrica dos números complexos mediante pontos do plano foi decisiva para sua aceitação. A possibilidade dessa representação era clara para vários autores, como Cotes, De Moivre, Euler e Vandermonde; todos eles tentaram resolver a equação  $x^n - 1 = 0$  pensando em suas soluções como vértices de um polígono regular de  $n$  lados. Essa ideia era ainda incompleta, pois nenhum desses autores achou também uma interpretação geométrica para as operações com complexos.

O primeiro a formular uma tal interpretação foi um agrimensor norueguês chamado **Caspar Wessel** (1745-1818), um autodidata. Ele é autor de um artigo intitulado *Sobre a representação analítica da direção: uma tentativa*, que foi publicado em 1799 nas memórias da Real Academia da Dinamarca. Ali, escreveu:

Vamos designar por +1 a unidade retilínea positiva, por  $+e$  outra perpendicular à primeira, com a mesma origem; então o ângulo de direção de +1 será  $0^\circ$ , o de  $-1$  será  $180^\circ$ , o de  $e$  será  $90^\circ$  e o de  $-e$  será  $-90^\circ$  ou  $270^\circ$ .



Tal como fazemos hoje em dia, ele representa o complexo  $a + bi$  pelo vetor do plano com origem  $O$  – a origem do sistema de eixos coordenados – e com extremo no ponto  $P$  de coordenadas  $(a, b)$ . Depois dá uma representação geométrica da soma de dois complexos  $a + bi$  e  $c + di$ , representando-os pelos vetores  $OP$  e  $OQ$ , respectivamente, e observando que a soma estará respresentada pela diagonal do paralelogramo construído sobre  $OP$  e  $OQ$ .

De forma análoga, o produto desses complexos estará representado por um vetor  $OR$  tal que o comprimento de  $OR$  é o produto dos comprimentos de  $OP$  e  $OQ$ , e o ângulo que  $OR$  forma com o eixo  $Ox$  é igual à soma dos ângulos formados por  $OP$  e  $OQ$  com esse eixo.

Uma representação semelhante foi dada por **Jean-Robert Argand** (1768-1822), um bibliotecário suíço, também autodidata, que em 1806 publicou um pequeno livro intitulado *Essai sur la manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. Ele observa que se multiplicamos  $+1$  por  $i$  obtemos  $i$  e se multiplicamos esse resultado novamente por  $i$  obtemos  $-1$ . Ele pensa, então, em representar  $i$  por uma operação que aja de modo análogo. Assim, podemos representar  $i$  por uma rotação de  $90^\circ$  em sentido anti-horário.

A partir daqui, tal como Wessel, ele dá interpretações para números da forma  $a + bi$  e para as operações com complexos, aplicando seus resultados à demonstração de teoremas de álgebra, geometria e trigonometria.

Esses trabalhos tiveram pouco ou nenhum efeito sobre os matemáticos da época; a memória de Wessel só foi notada quando publicada em tradução francesa em 1897, e o livro de Argand, embora causasse uma certa controvérsia, teve pouco impacto, talvez por ser a única contribuição de seu autor à Matemática. Quem verdadeiramente tornou a interpretação geométrica amplamente aceita foi **Carl Friederich Gauss** (1777-1855).

A julgar pelas suas demonstrações do teorema fundamental da álgebra, ele já conhecia a interpretação gráfica dos complexos em torno de 1815, embora escrevesse, numa carta de 1825, que a verdadeira metafísica de  $\sqrt{-1}$  é elusiva. Finalmente, em 1831, ele escreveu um artigo muito explícito sobre a questão. Diz na introdução:



O autor tem considerado há vários anos essa parte importante da Matemática sob um ponto de vista diferente, que permite conferir às quantidades imaginárias, como as negativas, uma existência objetiva.

O significado intuitivo dos números complexos fica completamente estabelecido e não se precisa mais para admitir estas quantidades no domínio da aritmética.

Ele observa também que se as unidades  $1, -1, \sqrt{-1}$  não fossem chamadas de positiva, negativa e imaginária, mas direta, inversa e lateral, as pessoas não teriam tido a impressão de que há algo de misterioso nesses números.

A observação de Gauss a respeito da *existência objetiva* dos números complexos ilustra a visão da Matemática na época. Parece que o fato de esses números poderem ser representados geometricamente lhes dá essa existência. Em outras palavras, parece que, para os matemáticos daquele período, os entes geométricos tinham um tipo de *realidade* que faltava aos objetos da aritmética.

Finalmente, a formalização completa dos números complexos como pares ordenados de números reais será desenvolvida por **William Rowan Hamilton** (1805-1865) em 1833, e ainda **Agustin Cauchy** (1789-1857) daria outro tipo de formalização em 1847.

Adaptado dos artigos

*A solução de Tartaglia para a equação do terceiro grau*

César Polcino Milies, **RPM** 25.

*A emergência dos números complexos*

César Polcino Milies, **RPM** 24.

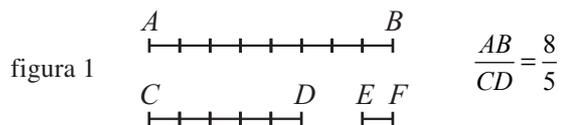


## Grandezas incomensuráveis e números irracionais

Existem, em Matemática, conceitos que parecem muito simples a uma visão superficial, mas que, submetidos a uma análise mais cuidadosa, revelam aspectos verdadeiramente surpreendentes.

Vamos tratar aqui da reta na sua representação numérica em termos das abscissas de seus pontos para mostrar que esses conceitos de *reta* e de *número* não têm uma simplicidade tão inocente como parecem revelar a uma visão menos profunda. Exploraremos alguns fatos notáveis e inesperados, que estão ligados à primeira grande crise do desenvolvimento da Matemática, ocorrida no final do 5º século a.C.

Uma questão com que lidavam os matemáticos gregos daquela época era a de comparar grandezas da mesma espécie, como dois segmentos de reta, duas áreas ou dois volumes. No caso de dois segmentos retilíneos  $AB$  e  $CD$ , dizer que a razão  $AB/CD$  é o número racional  $m/n$ , significava para eles (e ainda significa para nós) que existia um terceiro segmento  $EF$  tal que  $AB$  fosse  $m$  vezes  $EF$  e  $CD$   $n$  vezes esse mesmo segmento  $EF$ . Na figura 1 ilustramos essa situação com  $m = 8$  e  $n = 5$ .





No tempo de Pitágoras (580 – 500 a.C. aproximadamente) – e mesmo durante boa parte do 5º século a.C. – pensava-se que os números racionais fossem suficientes para comparar segmentos de reta; isto é, dados dois segmentos  $AB$  e  $CD$ , seria sempre possível encontrar um terceiro segmento  $EF$  contido um número inteiro de vezes em  $AB$  e outro número inteiro de vezes em  $CD$ , situação esta que descrevemos dizendo que  $EF$  é um *submúltiplo comum* de  $AB$  e  $CD$ . Uma simples reflexão revela que essa é uma idéia muito razoável. Afinal, se  $EF$  não serve, podemos imaginar um segmento menor, outro menor ainda, e assim por diante. Nossa intuição geométrica parece dizer-nos que há de existir um certo segmento  $EF$ , talvez muito pequeno, mas satisfazendo aos propósitos desejados. Na figura 2 ilustramos uma situação com segmento  $EF$  bem menor que o da figura 1. O leitor deve ir muito além, imaginando um segmento  $EF$  tão pequeno que nem se possa mais desenhar, para se convencer, pela sua intuição geométrica, da possibilidade de sempre encontrar um submúltiplo comum de  $AB$  e  $CD$ .

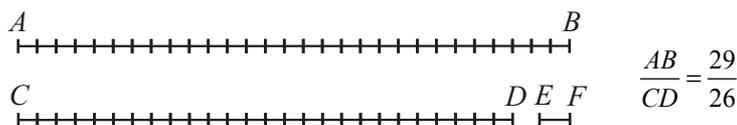


figura 2

Dois segmentos nessas condições são ditos *comensuráveis*, justamente por ser possível medi-los ao mesmo tempo, com a mesma unidade  $EF$ . Entretanto, não é verdade que dois segmentos quaisquer sejam sempre comensuráveis. Em outras palavras, existem segmentos  $AB$  e  $CD$  sem unidade comum  $EF$ , os chamados segmentos *incomensuráveis*. Esse é um fato que contraria nossa intuição geométrica, e por isso mesmo a descoberta de grandezas incomensuráveis na Antiguidade representou um momento de crise no desenvolvimento da Matemática.

Foram os próprios pitagóricos que descobriram grandezas incomensuráveis, provavelmente entre 450 e 400 a.C.; e, ao que tudo indica, isto se fez através de um argumento geométrico, como o que apresentaremos a seguir, demonstrando que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos incomensuráveis.

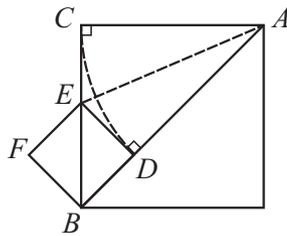


figura 3

Na figura 3 representamos um quadrado com diagonal  $\delta = AB$  e lado  $\lambda = AC$ . Suponhamos que  $\delta$  e  $\lambda$  sejam comensuráveis. Então existirá um terceiro segmento que seja submúltiplo comum de  $\delta$  e  $\lambda$ .

Fazemos agora a seguinte construção: traçamos o arco  $\widehat{CD}$  com centro em  $A$  e o segmento  $ED$  tangente a esse arco em  $D$ . Então, nos triângulos retângulos  $ACE$  e  $ADE$ , os catetos  $AC$  e  $AD$  são iguais e a hipotenusa  $AE$  é comum, logo são também iguais os catetos  $CE$  e  $DE (= BD)$ .

Portanto,

$$\delta = AB = AD + BD = \lambda + BD$$

$$\lambda = BC = BE + EC = BE + BD$$

ou seja,

$$\delta = \lambda + BD \quad (1)$$

$$\lambda = BE + BD. \quad (2)$$

Se um segmento é submúltiplo comum de  $\delta$  e  $\lambda$ , concluímos, por (1), que também é submúltiplo de  $BD$ . Daqui e de (2) segue-se que também é submúltiplo de  $BE$ . Provamos assim que se houver um segmento  $\sigma$  que seja submúltiplo comum de  $\delta = AB$  e  $\lambda = AC$ , então o mesmo segmento  $\sigma$  será submúltiplo comum de  $BE$  e  $BD$ , segmentos esses que são a diagonal e o lado do quadrado  $BDEF$ . Ora, a mesma construção geométrica que nos permitiu passar do quadrado original ao quadrado  $BDEF$  pode ser repetida com este último para chegarmos a um quadrado menor ainda; e assim por diante, indefinidamente; e esses quadrados vão se tornando arbitrariamente pequenos, pois, como é fácil ver, as dimensões de cada quadrado diminuem em mais da metade quando passamos de um deles a seu sucessor. Dessa maneira, provamos que o



segmento deverá ser submúltiplo comum do lado e da diagonal de um quadrado tão pequeno quanto desejemos. Evidentemente, isso é um absurdo! Somos, pois, levados a rejeitar a suposição inicial de que o lado  $AC$  e a diagonal  $AB$  do quadrado original sejam comensuráveis. Concluimos, pois, que o *lado e a diagonal de qualquer quadrado são grandezas incomensuráveis* C.Q.D.

A descoberta dos incomensuráveis representou, no 5º século a.C., uma derrota para os pitagóricos. De fato, para eles o número era a essência de tudo. Eles acreditavam na possibilidade de explicar todos os fenômenos do mundo sensível em termos dos números e de suas relações, tanto na Geometria como na Música, na Astronomia ou na Física, enfim, o número seria a essência última do ser e de todos os fenômenos. Mas por número eles entendiam apenas o que chamamos hoje de “números naturais”, ou inteiros positivos: 1, 2, 3, 4, .... Nem as frações eram números, já que elas apareciam como relações entre grandezas da mesma espécie. Agora que haviam sido descobertas grandezas incomensuráveis, estava claro que os números (naturais) eram insuficientes até mesmo para definir a razão entre duas grandezas, o que se constituía num sério entrave à Filosofia Pitagórica.

Ao mesmo tempo em que essas coisas aconteciam, outros argumentos propostos pelos filósofos da época – dentre os quais os de Zeno são os mais famosos – também apontavam dificuldades na suposta harmonia entre a Geometria e os números. Tudo isso culminou numa crise no desenvolvimento da Matemática, crise essa que só foi definitivamente superada com a criação da teoria dos números reais (racionais e irracionais) no século passado, devido, sobretudo aos trabalhos do matemático alemão Richard Dedekind (1831-1916).

Uma consequência da existência de grandezas incomensuráveis é a existência de pontos na reta sem abscissas racionais.

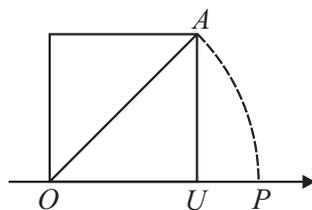


figura 4



De fato, com referência à figura 4, basta tomar  $OP = AO$ , onde  $AO$  é a diagonal de um quadrado de lado unitário  $OU$ . Como  $OP$  e  $OU$  são incomensuráveis, não é possível expressar a razão  $OP/OU$  como um número racional.

Que número seria a abscissa de  $P$ ? Pelo teorema de Pitágoras,

$$OA^2 = OU^2 + UA^2.$$

Como  $AO = OP$  e  $UA = OU = 1$ , obtemos

$$OP^2 = 2OU^2 = 2$$

ou seja,  $OP = \sqrt{2}$ .

É essa a abscissa de  $P$ , tomando  $OU$  como unidade de comprimento.

É interessante analisar essas questões do ponto de vista moderno dos números como abscissas dos pontos de uma reta. Para maior simplicidade, vamos restringir-nos apenas a uma semirreta  $OU$ , tomando o segmento  $OU$  como unidade de comprimento (figura abaixo).



figura 5

Então, todo ponto  $P$  da semirreta, que não seja a origem  $O$ , tem abscissa positiva  $x$ , que é a razão  $OP/OU$ .

Evidentemente, se todos os pares de segmentos  $OU$  e  $OP$  fossem comensuráveis, bastariam os números racionais não-negativos para caracterizar os pontos da semirreta, isto é, os números da forma  $m/n$ , com  $m$  e  $n$  inteiros,  $m \geq 0$  e  $n > 0$ . E é bom observar que isso condiz muito bem com nossa intuição geométrica: afinal, esses números ficam densamente distribuídos ao longo da semirreta, de tal forma que entre dois deles há sempre uma infinidade de números do mesmo tipo. Assim, entre os pontos  $A$  e  $B$  de abscissas 7 e 8 existem 9 números do tipo

$$7 + \frac{n}{10},$$

com  $n$  variando de 1 a 9. Isso porque dividimos o intervalo  $AB$  em 10 subintervalos de comprimento  $1/10$  cada um (figura 6). Mas podemos



dividir esse intervalo em 100 subintervalos, cada um de comprimento 0,01; ou 1000 subintervalos, cada um de comprimento 0,001;

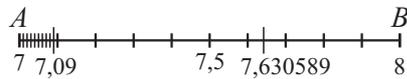


figura 6

e assim por diante. Se, digamos, adotarmos a divisão em 1.000.000 subintervalos iguais, encontraremos entre  $A$  e  $B$ , 999.999 pontos com abscissas racionais do tipo

$$7 + \frac{n}{1.000.000},$$

com  $n$  variando de 1 até 999 999. Na figura 6 ilustramos um desses pontos, aquele que tem abscissa 7,630598.

Pois bem, vamos confiar – ainda que provisoriamente – na suposição de que todos os pontos da semirreta tenham abscissas racionais e ver onde isso nos leva. Uma primeira consequência é que os pontos da semirreta formam um conjunto enumerável, pois o conjunto dos números racionais é enumerável (ver textos de Análise Real). Se  $r_1, r_2, r_3, \dots$  é uma enumeração dos racionais, faremos uma cobertura da semirreta por meio de segmentos, da seguinte maneira: cobrimos o ponto  $r_1$  com um segmento de comprimento  $c/2$ , centrado em  $r_1$ ; cobrimos  $r_2$  com um segmento de comprimento  $c/2^2$ , centrado em  $r_2$ ; fazemos o mesmo com  $r_3$ , utilizando agora um segmento de comprimento  $c/2^3$ ; com  $r_4$  utilizamos um segmento de comprimento  $c/2^4$ ; e assim por diante. Dessa maneira a semirreta ficará toda coberta com uma família infinita de segmentos não necessariamente disjuntos.

Vamos agora somar os comprimentos dos segmentos dessa família. Por simplicidade – e para enfatizar a visualização geométrica – colocamos os segmentos em fila, um em seguida ao outro e na ordem em que aparecem, como ilustra a figura 7. Isso é o bastante para nos convencer de que a soma de todos os seus comprimentos é exatamente igual a  $c$ , pois começamos com um segmento de comprimento  $c/2$ , adicionamos sua metade, depois a metade deste último e assim por diante.

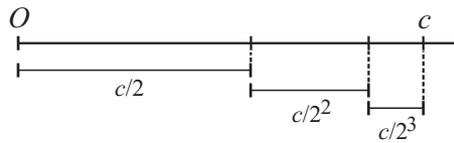


figura 7

O que acabamos de demonstrar é uma impossibilidade! Certamente não é possível cobrir a semirreta com um a família de segmentos cuja soma total dos comprimentos seja um número finito  $c$ ! (E o número  $c$  é arbitrário!) Afinal, a semirreta tem comprimento infinito! Para sairmos dessa contradição temos de voltar atrás em nossa hipótese inicial de que os pontos da reta numérica têm todos eles abscissas racionais. Em outras palavras, os números racionais são insuficientes para marcar todos os pontos de uma reta; ou ainda, em termos mais inteligíveis aos gregos da Antiguidade, existem segmentos  $AB$  e  $CD$  para os quais é impossível encontrar um segmento  $EF$  que seja submúltiplo comum de  $AB$  e  $CD$ .

Como se vê, acabamos de estabelecer a existência de segmentos incomensuráveis com um raciocínio típico da Análise moderna! Ele certamente causaria, na Antiguidade, tanta controvérsia quanto causaram os famosos argumentos de Zeno. Talvez mais ainda, pois os argumentos de Zeno foram rebatidos por Aristóteles que, através de seus escritos, fê-los chegar até nós. Mas como rebater o argumento que demos acima sobre a cobertura dos pontos de abscissas racionais? Seria necessário admitir a existência de uma infinidade muito maior (uma infinidade não enumerável) de pontos sem abscissas racionais! É claro que isso seria totalmente inaceitável para quem já tinha sérias objeções ao infinito enumerável. Mesmo hoje é muito surpreendente que se possa cobrir todos os pontos de abscissas racionais numa reta com uma família de segmentos cuja soma total dos comprimentos seja tão pequena quanto desejemos!

Esses pontos da reta sem abscissas racionais têm por abscissas números *irracionais* (desde que esses números sejam criados!) e  $\sqrt{2}$  é um deles, como decorre do argumento que demos antes referente à figura 4. No entanto, para completar este artigo, vamos reproduzir aqui a demonstração desse fato com um argumento puramente numérico e bem conhecido.



Começamos supondo que existisse uma fração irredutível  $m/n$  tal que  $\sqrt{2} = m/n$ . Então

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \quad \therefore m^2 = 2n^2.$$

Daqui segue-se que  $m^2$  é um número par, portanto o mesmo é verdade para  $m$ , isto é,  $m = 2r$ , sendo  $r$  outro número inteiro. Substituindo  $m = 2r$  em  $m^2 = 2n^2$  obtemos

$$4r^2 = 2n^2 \quad \therefore n^2 = 2r^2.$$

Mas essa última relação nos diz que  $n^2$  é número par, logo  $n$  também é par. Chegamos a um absurdo, pois  $m/n$  é fração irredutível, não sendo possível que  $m$  e  $n$  sejam ambos pares. Somos, assim, forçados a rejeitar a suposição inicial de que  $\sqrt{2}$  seja um número racional  $m/n$ .

A demonstração que acabamos de dar está baseada num argumento que, segundo Aristóteles, teria sido usado na descoberta de grandezas incomensuráveis. É um argumento que encerra um alto grau de abstração, razão pela qual muitos historiadores da Ciência acreditam que a descoberta dos incomensuráveis tenha ocorrido com um raciocínio mais concreto, como o argumento geométrico da figura 3.

Demonstrações como as que apresentamos, da incomensurabilidade do lado e da diagonal do quadrado, ou da irracionalidade de  $\sqrt{2}$ , foram as primeiras demonstrações por redução ao absurdo que se fizeram na Antiguidade. É notável que por volta de 400 a.C. a Matemática já tivesse alcançado tão avançado grau de sofisticação. O mesmo não aconteceu com outras ciências, como a Física, que somente no século XVII, com os trabalhos de vários cientistas, notadamente Galileu e Newton, alcançaria desenvolvimento comparável ao da Matemática de dois milênios antes.

Finalmente, um último comentário sobre a crise desencadeada com a descoberta dos incomensuráveis. De imediato isso tornou impossível falar em razão entre duas grandezas quando essas fossem incomensuráveis.



Havia a necessidade de se inventarem os números irracionais, o que só ocorreu nos tempos modernos. Mas os gregos souberam contornar esse problema, logo na primeira metade do 4<sup>o</sup> século a.C., e com muita genialidade! Foi Eudoxo (408? – 355? a.C.), da escola de Platão, quem desenvolveu, de maneira brilhante, uma teoria das proporções, com a qual foi possível superar a dificuldade dos incomensuráveis, usando apenas os números inteiros positivos. Mas isso é uma outra história...

Adaptado do artigo

*Grandezas incomensuráveis e números irracionais*

Geraldo Ávila, **RPM** 05.





## A outra face da moeda honesta

No outro dia, brincava com a minha filha Ana Letícia o seguinte jogo: cada uma tinha um peão avançando por uma linha de um tabuleiro de xadrez. A regra para avançar baseava-se no lançamento de uma moeda honesta: se saísse cara, o peão avançava uma casa, se fosse coroa, avançava duas casas. Quem chegasse primeiro ao fim (ou passasse) da linha, ganhava.

O jogo é muito rápido, de modo que depois de algumas revanches, a Ana me disse: “ué, no último lançamento só sai coroa?”.

De fato, comecei a perceber que, no último lançamento, o número de coroas era muito maior que o de caras. No entanto, ao observar todos os lançamentos, o número de caras e o de coroas eram praticamente iguais, o que indica a honestidade da moeda.

A Ana com seus sete anos foi brincar de outra coisa e eu fiquei pensando no assunto: o lançamento final poderá ser cara somente se o peão estiver na penúltima casa, já que com cara o peão avança apenas uma casa. Enquanto que poderá ser coroa, tanto se o peão estiver na penúltima quanto na antepenúltima casa.

Portanto, a face coroa tem realmente mais chance de aparecer no último lançamento que a face cara!!!



Mais formalmente, denotemos por  $N$  o número de lançamentos necessários para chegar à oitava casa (ou passar), por  $S_{N-1}$  a posição do peão antes do lançamento final, e por  $X_N$  a face nele observada. Se  $S_{N-1} = 7$ , então o lançamento seguinte pode ser cara ou coroa, com mesma chance. Por outro lado,  $S_{N-1} = 6$  implica que o lançamento seguinte deva ser coroa, senão este não seria o último.

Assim, pela lei da probabilidade total,

$$P(X_N = \text{cara}) = P(S_{N-1} = 7) \times \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$P(X_N = \text{coroa}) = P(S_{N-1} = 7) \times \frac{1}{2} + P(S_{N-1} = 6) \times 1 > P(X_N = \text{cara}).$$

A última desigualdade encerra o assunto, mas eu ainda queria conhecer a probabilidade de obter coroa no último lançamento.

O evento  $[S_{N-1} = 6]$  ocorre se e somente se forem observadas as seguintes seqüências nos lançamentos:

$$\{(2, 2, 2, 2), (1, 1, 2, 2, 2), (1, 1, 1, 1, 2, 2), (1, 1, 1, 1, 1, 1, 2)\}$$

ou suas possíveis permutações (lembrando que o último lançamento deve ser coroa). Portanto,

$$P(S_{N-1} = 6) = \frac{1}{2^4} + \binom{4}{2} \frac{1}{2^5} + \binom{5}{1} \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7},$$

que é aproximadamente  $1/3$ . Como a penúltima posição só pode ser 6 ou 7, então  $P(S_{N-1} = 7)$  é aproximadamente  $2/3$ .

Substituindo esse resultado em (1), temos que a probabilidade de obter coroa no lançamento final é aproximadamente  $2/3$ .

A primeira conclusão disso tudo é que minha filha é algo exagerada em seus comentários. A segunda é que moeda honesta quando chega ao fim da linha...

### Comentários

O problema abordado neste texto é uma versão discreta do conhecido “Paradoxo do tempo esperado”, definido originalmente no contexto de processos de renovação a tempo contínuo.



A novidade nesta apresentação é que inspira a construção física de um mecanismo que permite visualizar esse resultado: por exemplo, mediante uma trilha na qual se avança de acordo com o lançamento de um dado equilibrado, ou a própria corrida de oito passos no tabuleiro de xadrez.

A reação usual das pessoas é de espanto ao constatar o desequilíbrio da distribuição obtida, ou de dúvida a respeito da honestidade da moeda. Mesmo sendo contra-intuitivo, o resultado é natural se levarmos em consideração que há outra variável aleatória envolvida no processo, que é o número de lançamentos necessários para se alcançar o fim da linha,  $N$ .

Se bem é verdade que o resultado de qualquer lançamento típico,  $X_N$ , é uniforme no conjunto  $\{cara, coroa\}$  e independente dos demais lançamentos, o mesmo não ocorre com o lançamento final,  $X_N$ . A variável aleatória  $X_N$  não é independente dos lançamentos anteriores, depende da penúltima posição.

Uma outra forma de entender o resultado é que é mais fácil cobrir a última casa com um passo grande (de duas casas) que com um passo pequeno (de uma casa). Assim, a diferença entre a frequência de caras e coroas fica ainda mais evidente se avançarmos uma casa ao obter cara e três ao obter coroa, por exemplo. No caso extremo de avançarmos uma casa com cara e oito casas com coroa, a chance de obter cara no último lançamento é  $1/256$ , menos que 4 em 1000!!!

Adaptado do artigo

*A outra face da moeda honesta*

Laura L. R. Rifo, **RPM** 64.



## Números de regiões: um problema de contagem

Muitos problemas em Matemática envolvem processos adequados de “contagem” que, frequentemente, conduzem a fórmulas gerais extremamente úteis; por exemplo, para contar de quantas maneiras podemos combinar  $n$  objetos em grupos de  $r$  desses objetos, usamos a conhecida fórmula que dá o número de *combinações* de  $n$  objetos tomados  $r$  a  $r$ , a saber:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Vamos analisar um problema de contagem do número de regiões no plano que pode ser resolvido de maneira direta, simples e interessante. Trata-se do seguinte:

*Considere 100 pontos distribuídos sobre uma circunferência, de tal modo que o segmento ligando dois quaisquer desses pontos não passe pelo ponto de intersecção de outros dois segmentos. Calcular o número  $R$  de regiões obtidas no círculo quando todos os 100 pontos estiverem ligados.*

Inicialmente, tentamos resolver o problema com um número menor de pontos. Examinando os casos 2, 3, 4 e 5 pontos, temos:

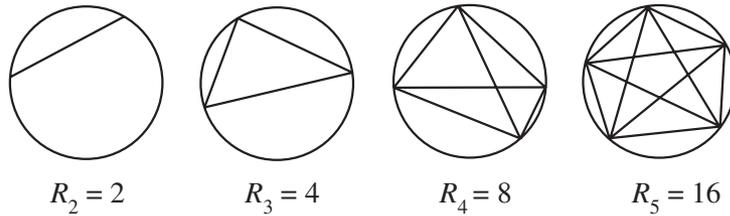


figura 1

Observamos que:

- 2 pontos:  $2^1$  regiões;
- 3 pontos:  $2^2$  regiões;
- 4 pontos:  $2^3$  regiões;
- 5 pontos:  $2^4$  regiões.

Os resultados levam a acreditar que 6 pontos forneceriam  $2^5 = 32$  regiões, logo 100 pontos forneceriam  $2^{99}$  regiões, e, por analogia (incorreta, como veremos)  $n$  pontos determinariam  $2^{n-1}$  regiões! Mas, ao verificar diretamente o que acontece com 6 pontos, vemos que ficam determinadas 31 regiões, e não 32.

Logo, a generalização pretendida não é verdadeira.

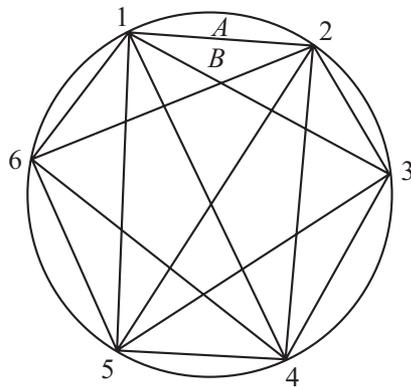


figura 2

Como determinar uma “fórmula” que forneça o número de regiões obtidas com 100 (ou um outro número qualquer) de pontos?

### Solução 1

Os segmentos ligando dois a dois os 100 pontos serão chamados “diagonais”; como para cada dois pontos temos uma diagonal, o número



delas é  $C(100,2) = \binom{100}{2}$ , e o número de pontos de intersecção das diagonais é  $C(100,4) = \binom{100}{4}$ , visto que cada 4 pontos determinam duas diagonais, as quais têm um ponto em comum.

Vamos descrever um processo que nos permite obter o número de regiões pela *eliminação sucessiva de diagonais*.

Ao retirarmos uma das diagonais, o número de regiões vai diminuir, visto que duas regiões que têm em comum um segmento da diagonal retirada fundem-se em uma única região.

Por exemplo, na figura 2, a retirada da diagonal  $D_{12}$ , que liga os pontos 1 e 2, faz com que as regiões  $A$  e  $B$  se transformem em uma única região; a retirada da diagonal  $D_{35}$  transforma em quatro as oito regiões que têm partes dessa diagonal como arestas.

Podemos observar que, ao retirarmos uma diagonal, o *número de regiões decresce conforme o número de pontos de intersecção dessa diagonal com aquelas que ainda não foram removidas, mais um*. Com efeito, esse é o número de segmentos nos quais os referidos pontos de intersecção dividem a diagonal, e a remoção de cada um desses segmentos transforma duas regiões em uma. Assim, a remoção da diagonal  $D_{12}$ , que não tem ponto de intersecção com as demais, produz um decréscimo de apenas *um* no número total de regiões; já a retirada da diagonal  $D_{35}$ , que tem 3 pontos de intersecção com as demais diagonais, produz um decréscimo de 4 regiões.

Notemos que, no processo de retirada sucessiva das diagonais, considera-se o número de pontos de intersecção de cada diagonal com aquelas que ainda não foram retiradas; no final do processo, ao serem retiradas, sucessivamente, todas as diagonais, tal número é igual ao número total de pontos de intersecção de todas as diagonais, ou seja

$C(100,4) = \binom{100}{4}$ ; ao mesmo tempo, o número de regiões decresce até reduzir-se a uma única região, quando todas as diagonais tiverem sido



eliminadas. Podemos então concluir que o número de regiões eliminadas no processo de retirada sucessiva de todas as diagonais é dado pelo número total de pontos de intersecção de todas as diagonais, ou seja

$$C(100,4) = \binom{100}{4}, \text{ acrescido de tantas parcelas iguais a 1 quantas são}$$

as diagonais, então,  $C(100,2) = \binom{100}{2}$ . Portanto, o número inicial de regiões, que é igual ao número de regiões eliminadas mais uma, a que restou no final do processo, é dado por

$$R_{100} = \binom{100}{0} + \binom{100}{2} + \binom{100}{4} = 3.926.176.$$

Observe que, para  $n$  pontos, temos a mesma expressão, apenas trocando o 100 por  $n$ . E, para 6 pontos, a fórmula obtida fornece

$$R_6 = \binom{6}{0} + \binom{6}{2} + \binom{6}{4} = 31, \text{ como havíamos verificado!}$$

**Solução 2** (No volume anterior (2007) do número especial da **RPM** para a OBMEP esta solução, com menos detalhes, aparece na página 93.)

Em Geometria, uma das fórmulas mais notáveis é a chamada *fórmula de Euler*, que estabelece uma relação entre o número de vértices, arestas e faces de um poliedro:  $V - A + F = 2$ .

Mostraremos, em seguida, como a fórmula que fornece o número de regiões determinadas por  $n$  pontos, distribuídos em uma circunferência, pode ser obtida a partir da fórmula de Euler, o que era de se esperar, pois a demonstração mais conhecida da fórmula de Euler, devida a Cauchy, começa removendo uma face do poliedro e deformando a parte restante em uma região plana que é um polígono subdividido pelas arestas do poliedro. Para poliedros planos, como o da figura 2, obtidos pela interligação de  $n$  pontos na circunferência, a fórmula de Euler se reduz a  $V - A + F = 1$ . (1)

Vamos calcular, separadamente,  $V$ ,  $A$  e  $F$  em função de  $n$  e substituí-los na fórmula (1) para obter  $R_n$ .



### Cálculo do número de vértices

Para cada 4 vértices na circunferência existem dois, e apenas dois, segmentos que se cruzam, e portanto determinam um vértice chamado

interno, de modo que o número desses vértices é  $C(n,4) = \binom{n}{4}$ , ou

$$\text{seja: } V = n + \binom{n}{4}. \quad (2)$$

### Cálculo do número de arestas

Cada vértice externo contribui com  $(n - 1)$  arestas, cada vértice interno com 4 arestas e como cada aresta contém 2 vértices:

$$2A = n(n-1) + 4 \binom{n}{4} \text{ e, portanto,}$$

$$A = \frac{n(n-1)}{2} + 2 \binom{n}{4} = \binom{n}{2} + 2 \binom{n}{4}. \quad (3)$$

### Cálculo do número de regiões

O número  $R_n$  é obtido acrescentando-se a  $F$  o número  $n$  de regiões compreendidas entre o poliedro plano e a circunferência, de modo que

$$F = R_n - n. \quad (4)$$

Basta agora substituir (2), (3) e (4) na fórmula (1) para se obter o valor de  $R_n$ , na mesma expressão da solução 1.

Observamos que o argumento usado na solução 1 serve também para demonstrar a fórmula de Euler.

Adaptado do artigo

*Número de regiões: um problema de contagem*

Antônio C. Patrocínio, **RPM** 12.



## Intuição e Probabilidade

Em muitas situações do cotidiano estamos interessados no cálculo de determinadas probabilidades. Ocorre que, em certos casos, especialmente aqueles envolvendo o conceito de probabilidade condicional, esses cálculos levam a conclusões que podem contrariar a intuição. Apresentamos, neste texto, um exemplo dessa situação.

Num país, 10% da população é portadora de um vírus. Um teste para detectar a presença do vírus dá 90% de acertos quando aplicado a portadores e 80% de acertos quando aplicado a não portadores.

Qual o percentual de pessoas realmente portadoras do vírus, dentre aquelas que o teste classificou como portadoras?

Vejamos uma solução que não cita teoremas de Probabilidade ou Estatística.

Considere que o teste foi aplicado aos  $I$  habitantes do país. O número de testes que indicou a presença do vírus foi:

$0,9 \times 0,1 \times I + 0,2 \times 0,9 \times I = 0,09 I + 0,18 I = 0,27 I$ , sendo que a primeira parcela representa os 90% que são realmente portadores e a segunda parcela representa os 20% que não são portadores. Logo, do total,  $0,27 I$ , são portadoras  $0,09 I$ .



Assim, são realmente portadoras do vírus  $0,09I / 0,27 I = 1/3 \approx 33,3\%$  das pessoas que o teste classificou como portadoras.

Esse número é no mínimo curioso e mostra que uma pessoa que fez o teste e foi classificada como portadora tem grande possibilidade de ser um “falso-positivo” (normalmente, quando uma pessoa faz um teste desse tipo e o resultado é positivo, os médicos recomendam um novo teste).

Por exemplo, o número de testes que indicaram a ausência do vírus foi  $0,73 I$  e, dentre esses,  $0,72 I$  não são portadores, o que dá

$0,72 I / 0,73 I \approx 98,6\%$  de não portadores dentre os classificados como não portadores.

Algumas variações nos dados também originam resultados interessantes. Por exemplo:

Se  $0,5\%$  da população é portadora e o teste acerta em  $98\%$  dos casos, *então* somente  $20\%$  das pessoas que o teste classificou como portadoras são realmente portadoras.

Adaptado do artigo

*Intuição e Probabilidade*

Raul F. W. Agostino, **RPM** 27.

### Resposta do Desafio

Como cada um dos pontos marcados na figura pertence a duas circunferências, a soma total dos números colocados nas quatro circunferências (contando cada circunferência em separado) é igual a

$$2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 90.$$

Para que a soma  $S$  dos números pertencentes à circunferência externa seja exatamente igual à soma ( $S$ ) dos números pertencentes a cada uma das circunferências internas, deveríamos ter  $90 = 4S$ , o que é impossível, uma vez que  $90$  não é divisível por  $4$ .

O problema não tem solução.



## Problemas I: problemas interessantes com números primos

---

**P1.** Escreva o número 91 como soma de dois números primos.

**P2.** Eu e meu irmão caçula temos idades entre 10 e 20 anos e hoje nossas idades são expressas ambas por números primos, fato que se repetirá pela próxima vez daqui há 18 anos. Determine minha idade sabendo que a idade de nosso irmão mais velho, que, hoje, também é um número primo, é uma unidade maior do que a soma das nossas idades.

**P3.** Uma equação do 2ª grau, cujos coeficientes são todos números primos, pode apresentar duas raízes iguais?

**P4.** Os números  $a$ ,  $b$  e  $\log_b a$  podem ser todos primos?

A resposta aos dois problemas acima é *não*, e eles não devem apresentar maiores dificuldades ao leitor.

**P5.** Quantos pontos da reta  $y = x + 51$  são tais que as suas duas coordenadas são números primos?

Observe-se que, trocando o número 51 por outro valor, o problema pode tornar-se muito mais difícil. Para a reta  $y = x + 2$  somos conduzidos ao conceito de “primos gêmeos” (diferem por 2 unidades). Até hoje é um problema “em aberto” saber se existem ou não infinitos pares de “primos gêmeos”.

Se tomássemos a reta  $y + x = 40$  obteríamos seis soluções: (3, 37), (37, 3), (11, 29), (29, 11), (17, 23) e (23, 17), todas no primeiro quadrante e que podem ser obtidas por inspeção direta.

Neste instante é natural lembrar que a famosa conjectura de Goldbach – “todo número natural par pode ser escrito como soma de dois números primos” – ainda não foi provada e nem se encontrou um contra-exemplo.

**P6.** As medidas dos lados de um triângulo retângulo (numa mesma unidade) podem ser números primos?



**P7.** Para quantos pontos da circunferência  $x^2 + y^2 = 361$  as duas coordenadas são números primos?

**P8.** Para quantos pontos da circunferência  $x^2 + y^2 = 461$  as duas coordenadas são números inteiros?

Esse problema se assemelha ao anterior, embora seja mais difícil que ele. Para resolvê-lo sugerimos a leitura de um artigo de Gilberto Garbi, “Outro belo teorema de Fermat”, publicado na **RPM** 38.

**P9.** Determine as medidas, em graus, dos ângulos internos de um triângulo acutângulo, sabendo que elas são expressas por números primos.

A mesma pergunta sem a hipótese de ser acutângulo exige um pouco mais de trabalho.

**P10.** Quantos divisores positivos possui o número 2 420?

Esse exercício é uma aplicação clássica do Teorema Fundamental da Aritmética e do Princípio Fundamental da Contagem.

**P11.** Verifique que todos os  $n - 1$  números da sequência  $n! + 2, n! + 3, \dots, n! + n$  são números compostos, isto é, nenhum deles é um número primo.

**P12.** Quantos são os números naturais, de 1 a 100, que podem ser escritos como um produto de dois números naturais distintos entre si e diferentes de 1?

**P13.** Apresente algum número natural  $n$  para o qual o valor numérico  $p(n)$  do polinômio  $p(n) = x^2 + x + 41$  não seja um número primo.

**P14.** Quantos polígonos regulares, com número par de lados, podem ter todas as diagonais expressas (numa mesma unidade) por números primos?

**P15.** Há dois anos, ano em que finalmente concluí meu Doutorado em Matemática, nasceu meu segundo filho e ocorreu uma notável coincidência: eu e meus dois filhos passamos a fazer aniversário no mesmo dia do ano. A partir daí outras coincidências aconteceram. No



ano passado nossas três idades foram representadas por quadrados perfeitos e hoje, dia em que estamos comemorando mais um aniversário, percebo que nossas idades são representadas por três números primos. Supondo que vivamos cem anos cada um, pergunto: qual é minha idade hoje? Nos próximos anos, quantas vezes todas as nossas idades voltarão a ser representadas por números primos?

Adaptado do artigo

*Os primos esquecidos*

Chico Nery e Cláudio Possani, **RPM**.





## Problemas II: problemas do PISA\*

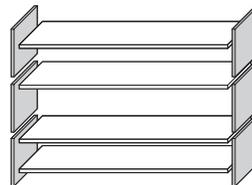
*\*Programme for International Student Assessment –  
Programa Internacional de Avaliação de Alunos 2000/2003*  
<http://www.inep.gov.br/internacional/pisa/novo> (julho de 2009)

### Questões

#### Estantes

Para construir uma estante completa, um marceneiro precisa do seguinte material:

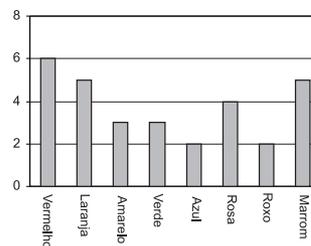
- 4 pranchas grandes de madeira,
- 6 pranchas pequenas de madeira,
- 12 braçadeiras pequenas,
- 2 braçadeiras grandes e
- 14 parafusos.



O marceneiro possui em estoque 26 pranchas grandes de madeira, 33 pranchas pequenas de madeira, 200 braçadeiras pequenas, 20 braçadeiras grandes e 510 parafusos. Quantas estantes completas o marceneiro poderá fazer?

#### Bombons coloridos

A mãe de Roberto permite que ele pegue um bombom de um saco. Ele não consegue ver os bombons. O gráfico ao lado mostra o número de bombons de cada cor contidos no saco.

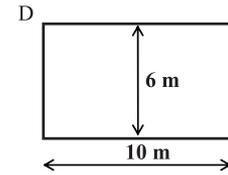
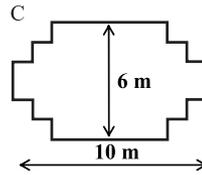
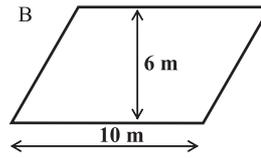
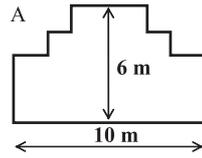


Qual é a probabilidade de Roberto pegar um bombom vermelho?

- A) 10%   B) 20%   C) 25%   D) 50%

#### Carpinteiro

Um carpinteiro tem 32 metros de tábua para cercar um canteiro em uma horta. Ele está pensando em utilizar um dos seguintes modelos para o canteiro.



Na tabela abaixo, faça um círculo em “Sim” ou “Não” para cada modelo, indicando se ele pode ou não ser feito com 32 metros de tábuas.

Modelo de canteiro	Usando esse modelo, o canteiro pode ser construído com 32 metros de tábua?
modelo A	Sim/Não
modelo B	Sim/Não
modelo C	Sim/Não
modelo D	Sim/Não

### Dados

O desenho da direita representa dois dados.

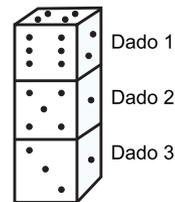
Os dados são cubos com faces numeradas de acordo com a seguinte regra: em um mesmo dado, o número total de pontos de duas faces opostas é sempre sete.



### Questão 1

À direita, vemos três dados empilhados um sobre o outro. O dado 1 possui quatro pontos na face superior.

Quantos pontos há, no total, nas cinco faces horizontais que não podemos ver (face inferior do dado 1, faces superiores e inferiores dos dados 2 e 3)?



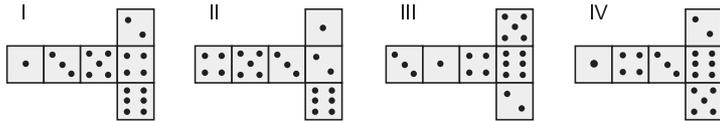
### Questão 2

Você pode fazer um dado, cortando, dobrando e colando uma cartolina. Isso pode ser feito de diversas maneiras. Na figura a seguir, há quatro



opções que podem ser utilizadas para fazer dados.

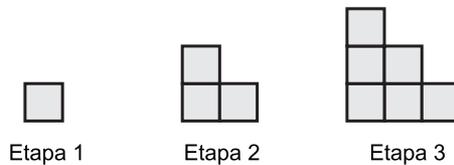
Quais dos formatos podem ser dobrados para formar um dado que obedeça à regra na qual a soma das faces opostas é 7? Para cada formato, faça um círculo em “Sim” ou “Não” na tabela abaixo.



Formato	Obedece à regra na qual a soma dos lados opostos é 7?
I	Sim/Não
II	Sim/Não
III	Sim/Não
IV	Sim/Não

### Sequência em escada

Roberto constrói uma sequência com o formato de uma escada, utilizando quadrados. Ele segue as seguintes etapas:



Como você pode ver, ele utiliza um quadrado na Etapa 1, três quadrados na Etapa 2 e seis na Etapa 3.

Quantos quadrados ele vai utilizar na Etapa 4?

### Terremoto

Foi divulgado um documentário sobre terremotos e a frequência com que eles ocorrem. Essa reportagem inclui uma discussão sobre a previsibilidade dos terremotos.

Um geólogo declarou: – Nos próximos vinte anos, a probabilidade de que ocorra um terremoto em Zedópolis é de dois sobre três.

Qual das opções a seguir exprime melhor o significado da declaração do geólogo?





### Questão 1

Que horas são em Berlim quando são 19 horas em Sydney?

### Questão 2

Mark e Hans não podem bater papo das 9h às 16h30 de seus horários locais respectivos, porque eles devem ir para a escola. Além disso, não poderão bater papo entre 23h e 7h porque estarão dormindo.

Qual seria um bom horário para Mark e Hans baterem papo? Escreva os horários locais na tabela ao lado:

Local	Horário
Sydney	
Berlim	

### Assaltos

Um repórter de TV apresentou o gráfico ao lado e disse:

– O gráfico mostra que, de 1998 para 1999, houve um grande aumento no número de assaltos.

Você considera que a afirmação do repórter é uma interpretação razoável do gráfico? Dê uma explicação que justifique a sua resposta.



### Colônia de férias

Os Serviços Comunitários de Zedópolis estão organizando um acampamento para um período de cinco dias. Inscreveram-se 46 crianças (26 meninas e 20 meninos) e 8 adultos (4 homens e 4 mulheres) apresentaram-se como voluntários para acompanhá-las e organizar o acampamento.

**Tabela 1: Adultos**

Sra. Marília
Sra. Carolina
Sra. Graça
Srta. Kátia
Sr. Sílvio
Sr. Nelson
Sr. William
Sr. Pedro

**Tabela 2: Dormitórios**

Nome	Número de camas
Vermelho	12
Azul	8
Verde	8
Roxo	8
Laranja	8
Amarelo	6
Branco	6



### Regra dos dormitórios

1. Os meninos e as meninas devem dormir em dormitórios separados.
2. Em cada dormitório deve dormir, pelo menos, um adulto.
3. O(s) adulto(s) que ficar(em) nos dormitórios deve(m) ser do mesmo sexo que as crianças.

Preencha a tabela abaixo, distribuindo as 46 crianças e os 8 adultos nos dormitórios, de maneira que todas as regras sejam obedecidas.

Nome	Número de meninos	Número de meninas	Nome(s) do(s) adulto(s)
Vermelho			
Azul			
Verde			
Roxo			
Laranja			
Amarelo			
Branco			

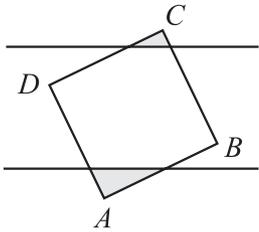
O leitor deve ter observado que, em linhas gerais, as questões são diferentes das que normalmente são apresentadas aos nossos alunos em sala de aula. Elas exigem pouco “conteúdo”, pouca “memória”, mas, nas palavras dos idealizadores do PISA, examinam *a capacidade dos alunos de analisar, raciocinar e refletir ativamente sobre seus conhecimentos e experiências, enfocando competências que serão relevantes para suas vidas futuras.*

No *site* indicado, além das questões de 2003, estão algumas questões de 2000, e também uma descrição dos mecanismos utilizados para a seleção dos estudantes que participarão do teste, normas de avaliação, algumas explicações sobre o mau desempenho dos brasileiros e outros temas correlatos.



## PROBLEMAS III

A numeração entre parênteses é a original dos exemplares da **RPM**

- (184) Os números reais  $a$ ,  $b$  e  $c$  são tais que  $a + b + c = 3$ ,  $a^2 + b^2 + c^2 = 13$  e  $a^3 + b^3 + c^3 = 27$ . Determine  $a^4 + b^4 + c^4$ .
- (205) Três aranhas caminham pelos lados de um triângulo  $ABC$  e movimentam-se de modo que em qualquer instante formam um triângulo e o baricentro de todos os triângulos formados é sempre o mesmo ponto (fixo)  $P$ . Sabendo-se que uma das aranhas percorre todo o triângulo  $ABC$ , mostrar que  $P$  é também o baricentro do triângulo  $ABC$ .
- (207) Um rapaz esqueceu o último algarismo do telefone da namorada e resolveu tentar falar com ela escolhendo ao acaso o último dígito. Se ele está num telefone público e só tem duas fichas, qual é a probabilidade de que ele consiga conversar com a namorada?
- (219) Dados  $x$  e  $y$  números inteiros positivos, mostre que, se  $x^2 + y^2 + xy$  é divisível por 10, então é divisível por 100.
- (220) Considere duas retas paralelas que distam  $a$  entre si e um quadrado  $ABCD$ , de lado  $a$ , situado no plano das paralelas numa posição tal que os vértices  $A$  e  $C$  estejam em lados opostos do plano dividido pela faixa das paralelas. Calcule a soma dos perímetros dos triângulos sombreados.
- (236) Achar todos os números  $m$  e  $n$  naturais que resolvam
$$n2^{n-1} + 1 = m^2.$$
- (265) Seja  $ABC$  um triângulo tal que  $\hat{A} = 60^\circ$ . Seja  $H$  o seu ortocentro e  $J \in \overline{AC}$  tal que  $AJ = 2JC$  e  $JC = JH$ . Mostre que o triângulo  $ABC$  é equilátero.

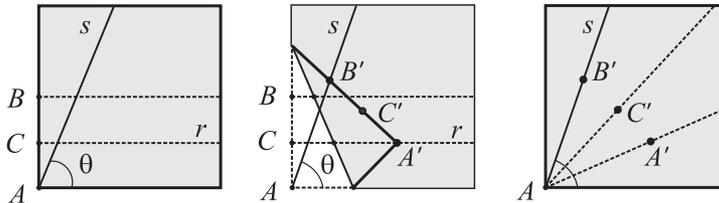


8. (266) Seja  $p(x)$  o polinômio de grau 2007, com coeficientes reais,

$$p(x) = \left(x \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{2007} + \cos \frac{2\pi}{2007}\right)^{2007}.$$

Determine o resto da divisão de  $p(x)$  por  $x^2 + 1$ .

9. (267) Numa folha quadrada de papel desenhe ou dobre um ângulo  $\theta$ , marque a metade da folha e a metade da metade. Dobre a folha de modo que  $A$  caia em um ponto  $A'$  pertencente a  $r$  e  $B$  em um ponto  $B'$  pertencente a  $s$  (ver figura). Marque os pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ , o correspondente de  $C$  na dobra. Prove que  $AB'$ ,  $AA'$  e  $AC'$  trisseccionam o ângulo  $\theta$ .

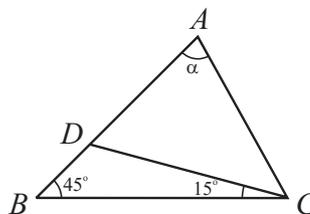


10. (268) Seja  $f: N \rightarrow N$  uma função tal que

$$f(f(x)) = x \text{ para todo } x \in N.$$

- a) Mostre que  $f$  é bijetora.  
 b) Exiba uma função  $f$  com a propriedade acima e tal que  $f(x) \neq x$  para todo  $x \in N$ .
11. (270) Dispõe-se de 2007 moedas “viciadas”  $M_1, M_2, \dots, M_{2007}$ . Sabe-se que, em um lançamento, a probabilidade de se obter cara na moeda  $M_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2007$ , é  $\frac{1}{(2i+1)}$ . Se as 2007 moedas são lançadas simultaneamente, qual é a probabilidade de que o número de caras obtidas seja ímpar?

12. (271) Na figura,  $AD = 2BD$ . Determine  $\alpha$ .





13. (272) Encontre as raízes reais da equação

$$\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = \sqrt{2}.$$

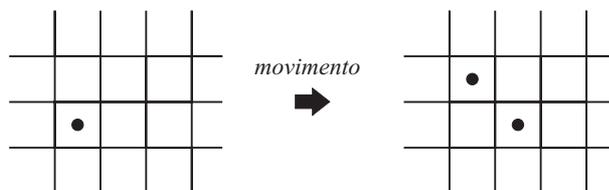
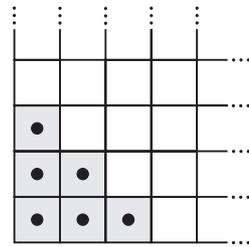
14. (274) Prove que:

- num triângulo retângulo a medida da mediana relativa à hipotenusa é igual à metade da medida da hipotenusa.
- todo triângulo pode ser decomposto em  $n$  triângulos isósceles, para todo  $n \geq 4$ .

15. (276) Determine todas as funções  $f: R \rightarrow R$  satisfazendo  $2f(x) + f(1-x) = x^{2008}$  para todo  $x \in R$ .

16. (277) Qual é a maior potência de 2 que divide  $3^{2008} - 1$ ?

17. (280) (Jogo de Kontsevich) Consideremos o tabuleiro infinito, ilustrado na figura, que ocupa o primeiro quadrante. Inicialmente, há 6 peças nas casas sombreadas no canto inferior esquerdo. Um *movimento* consiste em escolher uma peça sem vizinhos nas casas imediatamente acima e à direita e substituir essa peça por duas, colocando-as nas casas vizinhas vagas:



O objetivo do jogo é, a partir da configuração inicial, realizar uma sequência de movimentos de modo a deixar as 6 casas sombreadas sem peças.

- Atribua o “peso”  $2^{-i-j}$  para a casa na posição  $(i, j)$ , como mostra a figura (a casa inicial, inferior esquerda, situa-se na posição  $(0,0)$ ). Mostre que a soma dos pesos das casas ocupadas por peças, depois de se realizarem movimentos, é constante, isto é, não se altera após qualquer sequência de movimentos.



⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1/8	1/16	1/32	1/64	...	
1/4	1/8	1/16	1/32	...	
1/2	1/4	1/8	1/16	...	
1	1/2	1/4	1/8	...	

- b) Determine a soma de todos os pesos do tabuleiro.  
 c) Mostre que é impossível realizar o objetivo do jogo: não existe nenhuma sequência de movimentos que deixa as 6 casas iniciais, sombreadas, livres de peças!

18. (281) Simplifique:

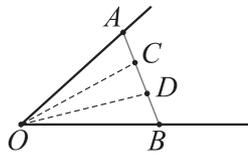
$$\prod_{2 \leq n \leq 2008} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \frac{4^3 - 1}{4^3 + 1} \cdots \frac{2008^3 - 1}{2008^3 + 1}.$$

19. (282) Prove que, se  $x$  e  $y$  são inteiros tais que

$$N = (x + 6y)(2x + 5y)(3x + 4y)$$

é múltiplo de 7, então  $N$  é múltiplo de 343.

20. (284) Dado um ângulo qualquer  $\widehat{AOB}$  com  $AO = BO$ , dividimos  $\overline{AB}$  em 3 partes iguais:  $AC = CD = BD$ . Pergunta-se: existe algum  $\widehat{AOB}$  para o qual os ângulos  $\widehat{AOC}$ ,  $\widehat{COD}$  e  $\widehat{BOD}$  são congruentes?





## Soluções dos Problemas I

### P1.

Os alunos não deverão ter dificuldade em perceber que, como a soma de dois ímpares é par e como 2 é o único primo par, os números são 2 e 89. Aliás, esse pode ser um bom momento para recordar com os alunos os testes de primalidade, para verificar que 89, efetivamente, é primo.

### P2.

As duplas de primos entre 10 e 20 são:

11 e 13, 11 e 17, 11 e 19, 13 e 17, 13 e 19 e 17 e 19.

Como a soma dos números adicionada de 1 deve resultar um primo, descarto as duplas 11 e 13 e 13 e 19. Como daqui a 18 anos as idades voltam a ser representadas por números primos, descarto as duplas que incluem o 17. Resta apenas uma possibilidade: minha idade é 19 anos e a do meu irmão é 11 anos.

### P3.

Para que a equação  $ax^2 + bx + c = 0$  (com  $a$ ,  $b$  e  $c$  primos) admita duas raízes iguais, devemos ter  $b^2 - 4ac = 0$  ou  $b^2 = 4ac$ , o que implica  $b^2$  par. Logo,  $b$  também é par e, como é primo,  $b = 2$ . De  $b^2 = 4ac$ , com  $b = 2$ , temos  $ac = 1$ , o que é absurdo para  $a$  e  $c$  primos.

Portanto, nas condições impostas, a equação não pode admitir duas raízes iguais.

### P4.

Seja  $x = \log_b a$ , portanto  $b^x = a$ . Se  $b$  e  $x$  são números primos, então  $b^x$  não é primo; logo,  $a$  não é primo.

### P5.

Se  $x = 2$ , temos  $y = x + 51 = 53$ , que é primo. Se  $x$  for qualquer outro primo, será um número ímpar, implicando  $y$  par maior que 2, logo, não primo. Assim, existe um único par,  $(2, 53)$ , da reta de equação  $y = x + 51$  que tem ambas as coordenadas dadas por números ímpares.

**P6.**

*Solução:* A resposta é não. Do teorema de Pitágoras temos a igualdade  $a^2 = b^2 + c^2$ . Sendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  primos, não podem ser todos ímpares e, como  $a > b$  e  $a > c$ , devemos ter  $b = 2$  ou  $c = 2$ . Digamos  $c = 2$ . Teremos então:

$$\begin{aligned}a^2 - b^2 &= 4 \\(a + b)(a - b) &= 4\end{aligned}$$

e analisando os possíveis valores de  $a + b$  e  $a - b$ , que são 1, 2 ou 4, concluímos que a situação é impossível.

**P7.**

Se  $x$  e  $y$  satisfazem a equação  $x^2 + y^2 = 361$ , sendo 361 ímpar, devemos ter  $x$  par e  $y$  ímpar ou  $x$  ímpar e  $y$  par. Se  $x$  é par e primo, então,  $x = 2$ ; logo,  $y^2 = 357$  e  $y$  não é, então, um número inteiro. Do mesmo modo verificamos ser impossível ter  $y$  par e  $x$  ímpar; logo, nenhum ponto da circunferência de equação  $x^2 + y^2 = 361$  tem ambas as coordenadas dadas por números primos.

**P8.**

Observamos, inicialmente, que  $461 = 100 + 361 = 10^2 + 19^2$ , logo os seguintes oito pontos, de coordenadas inteiras, pertencem à circunferência de equação  $x^2 + y^2 = 461$ :  $(10, 19)$ ,  $(-10, 19)$ ,  $(10, -19)$ ,  $(-10, -19)$ ,  $(19, 10)$ ,  $(-19, 10)$ ,  $(19, -10)$  e  $(-19, -10)$ .

Além disso, sendo 461 um número primo que dividido por 4 deixa resto 1, o resultado de *Fermat*, “todo número primo que dividido por 4 deixa resto 1 pode ser escrito como soma dos quadrados de dois números inteiros, de modo único, a menos da ordem”, prova que esses oito são os únicos pontos de coordenadas inteiras pertencentes à circunferência.

**P9.**

Se  $a + b + c = 180$ , com  $a$ ,  $b$  e  $c$  primos, não é possível ter  $a$ ,  $b$  e  $c$  ímpares; logo, pelo menos um deles, digamos o  $a$ , deve ser igual a 2, o que implica  $b + c = 178$ . Podemos ter  $b = c = 89$ , que é primo e, por verificação direta, mostra-se que não há outra possibilidade, já que o triângulo, sendo acutângulo, implica  $b < 90$  e  $c < 90$ .



Sem a hipótese de o triângulo ser acutângulo, obtemos, por tentativa, as possibilidades: 5 e 173, 11 e 167, 29 e 149, 47 e 131 e 71 e 107.

**P10.**

Decompondo 2420 em fatores primos encontramos:  $2420 = 2^2 \times 5 \times 11^2$ . Os divisores positivos de 2420 são todos do tipo  $2^\alpha \times 5^\beta \times 11^\delta$  com  $\alpha$  valendo 0, 1 ou 2,  $\beta$  valendo 0 ou 1 e  $\delta$  valendo 0, 1 ou 2.

Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, a quantidade de divisores positivos de 2420 é:  $3 \times 2 \times 3 = 18$ .

**P11.**

Observemos que:  $n! + 2$  é divisível por 2,  $n! + 3$  é divisível por 3, ...,  $n! + n$  é divisível por  $n$ , e assim sendo, nenhum deles é primo.

Para valores “grandes” de  $n$  essas sequências de números naturais consecutivos são chamadas “desertos de números primos”.

**P12.**

De 1 a 100 temos 100 números. Para obtermos a resposta à nossa pergunta, subtraímos de 100 o número de primos entre 1 e 100, que é 25; o número de quadrados de números primos, que é 4, e o número 1. A resposta é 70.

**P13.**

Para  $x = 40$ ,

$$\begin{aligned}x^2 + x + 41 &= 40^2 + 40 + 41 = 40(40 + 1) + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41(40 + 1) \\ &= 41^2 \text{ que não é primo. Também para } x = 41, x^2 + x + 41 = 41^2 + 41 + 41 \\ &= 41(41 + 1 + 1) = 41 \cdot 43, \text{ que não é primo.}\end{aligned}$$

Prova-se que para qualquer valor inteiro de  $x$ ,  $-40 \leq x \leq 39$ , tem-se  $x^2 + x + 41$  igual a um número primo (ver **RPM** 09, p. 33).

**P14.**

1. Como podemos construir um *quadrado* com qualquer tamanho, podemos construí-lo com suas diagonais medindo: 2 ou 3 ou 5, ...,

ou qualquer outro valor primo. O lado do quadrado medindo  $p \frac{\sqrt{2}}{2}$

faz a diagonal medir  $p$ , para qualquer  $p$  primo.

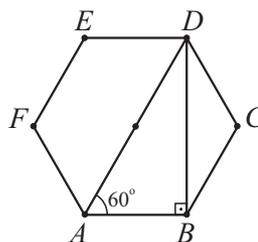


2. Já no caso do *hexágono* regular, se traçarmos duas diagonais, uma passando pelo centro e a outra não, vejamos o que acontece.

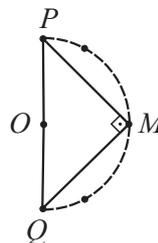
Seja  $ABCDEF$  um hexágono regular, no triângulo  $ABD$  temos

$$\frac{BD}{AD} = \text{sen}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ implicando que as me-}$$

didadas das diagonais  $BD$  e  $AD$  não podem ser simultaneamente expressas por números inteiros, logo **não** podem ser ambas números primos.



3. Para qualquer outro polígono regular com número par de lados (octógono, decágono, ... etc), se considerarmos dois vértices  $P$  e  $Q$  diametralmente opostos e um vértice  $M$  não consecutivo de  $P$  nem de  $Q$ , eles determinarão o triângulo  $PQM$ , retângulo em  $M$ , cujos lados são três das diagonais desse polígono e, como já foi provado no **P6**, as medidas desses três lados **não** podem ser simultaneamente expressas por números primos.



Conclusão, apenas o quadrado pode ter todas as suas diagonais com medidas expressas por números primos.

### P15.

No ano passado meu filho caçula certamente tinha 1 ano de idade. Meu outro filho tinha 4 ou 16 anos e eu, o pai, 36 anos.

Portanto, hoje, minha idade é 37 anos.

Quando a minha idade é ímpar, a do meu caçula é par e vice-versa; portanto, nunca mais nossas idades voltarão a ser todas simultaneamente representadas por números primos.



## Soluções dos Problemas II

### Estantes

5

### Bombons coloridos

B) 20%

### Carpinteiro

modelo A – sim

modelo B – não

modelo C – sim

modelo D – sim

### Dados

#### Questão 1

$$17 = 21 - 4$$

#### Questão 2

Não, Sim, Sim, Não (nesta ordem).

### Sequência em escada

10

### Terremoto

C) A probabilidade de haver um terremoto em Zedópolis nos próximos 20 anos é maior do que a probabilidade de não haver um terremoto.

### Feira de Verão

B) Pouco provável.

### Bate-papo pela Internet

#### Questão 1

10 da manhã ou 10h.

#### Questão 2

Qualquer horário ou intervalo de tempo que satisfaça a diferença de 9 horas e que esteja compreendido entre um dos seguintes intervalos:

Sydney: 16:30 h – 18:00 h; Berlim: 7:30 h – 9:00 h.

ou

Sydney: 7:00 h – 8:00 h; Berlim: 22:00 h – 23:00 h.



### Assaltos

Não, um crescimento de aproximadamente 10 não é muito grande comparado a um total de aproximadamente 500.

### Colônia de férias: uma solução

Nome	meninos	meninas	adultos
Vermelho	10		H H
Azul		7	M
Verde		7	M
Roxo	6		H
Laranja		7	M
Amarelo	4		H
Branco		5	M
Total	20	26	

H = homem

M = mulher



## Soluções dos Problemas III

1.

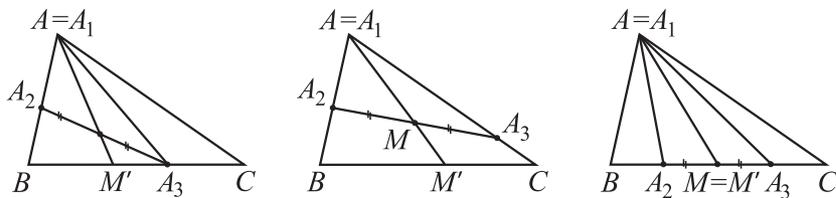
Vamos observar inicialmente que  $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$ .

Segue-se, então, que:  $a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b) + 2abc = 0$  ou equivalentemente,  $(a + b)(a + c)(b + c) = 0$ .

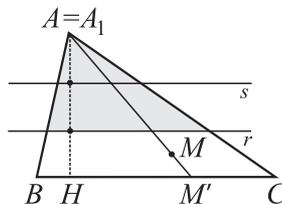
Para que isso ocorra, pelo menos um dos fatores deve ser nulo. Supondo  $a + b = 0$ , a primeira equação nos dá  $c = 3$ . Substituindo na segunda, obtemos  $a = \sqrt{2}$  e  $b = -\sqrt{2}$ . Segue-se que  $a^4 + b^4 + c^4 = 89$ .

2.

Suponhamos que seja a aranha  $A_1$  que percorre todo o  $\Delta ABC$  e consideremos o instante em que ela está em  $A$ . Seja  $M$  o ponto médio do lado  $A_2A_3$  do  $\Delta A_1A_2A_3$  formado pelas três aranhas nesse instante.



Traçamos  $r$  e  $s$  retas paralelas a  $\overline{BC}$  e que dividem a altura  $AH$  em três partes iguais. Prolongamos  $\overline{AM}$  até encontrar  $BC$  em  $M'$ . Como  $r$  e  $s$  dividem  $\overline{AM'}$  em três partes iguais (Tales), então o baricentro do  $\Delta A_1A_2A_3$  que é o ponto que dista  $AM/3$  de  $M$ , está na região pintada.





Repetindo o argumento quando a aranha  $A_1$  está em  $B$  e quando está em  $C$ , concluímos que o baricentro  $P$  comum dos triângulos formados pelas três aranhas está em três regiões que se cortam exatamente no baricentro do  $\Delta ABC$ , o que demonstra o resultado pedido. Para justificar esta última afirmação, observamos que a reta  $r$  e as outras duas construídas analogamente, quando a aranha  $A_1$  está em  $B$  ou  $C$ , encontram-se no baricentro do  $\Delta ABC$ .

3.

- a) A probabilidade de que o rapaz acerte na primeira tentativa é igual a  $1/10$ , uma vez que ele escolhe ao acaso um dos dez dígitos possíveis.
- b) Para que ocorra a segunda tentativa é necessário que ele tenha errado na primeira, e a probabilidade de isso acontecer é igual a  $9/10$ . Dado que errou na primeira tentativa, a probabilidade (condicional) de que ele acerte na segunda é igual a  $1/9$ , uma vez que, agora, o número de dígitos possíveis é igual a 9. Logo, a probabilidade de que ele acerte na segunda tentativa é  $(9/10)(1/9) = 1/10$ .

Segue que a probabilidade de que ele consiga conversar com a namorada é igual a  $(1/10) + (1/10) = 1/5$ .

4.

Se 10 divide  $x^2 + y^2 + xy$ , então 2 divide  $x^2 + y^2 + xy$ ; logo,  $x^2 + y^2 + xy$  é par, implicando  $x$  e  $y$  pares, o que, por sua vez, implica  $x^2 + y^2 + xy$  múltiplo de 4. Se 10 divide  $x^2 + y^2 + xy$ , então 5 divide  $x^2 + y^2 + xy$ .

Se mostrarmos que isso implica  $x$  e  $y$  múltiplos de 5, teremos que 25 dividirá  $x^2 + y^2 + xy$ , que é múltiplo de 4, logo 100 dividirá  $x^2 + y^2 + xy$ .

**Prova de que  $x$  e  $y$  são múltiplos de 5**

Escrevendo  $x = 5a + b$ ,  $y = 5c + d$ , com  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  inteiros não negativos e  $0 \leq b \leq 4$ ,  $0 \leq d \leq 4$ , obtemos

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + xy &= (5a + b)^2 + (5c + d)^2 + (5a + b)(5c + d) = \\ &= 5(5a^2 + 2ab + 5c^2 + 2cd + 5ac + ad + bc) + b^2 + d^2 + db.\end{aligned}$$

Como 5 divide  $x^2 + y^2 + xy$ , temos que 5 divide  $b^2 + d^2 + db$ .



Se  $b = d \neq 0$  temos  $b^2 + d^2 + bd = 3b^2$ , que não é múltiplo de 5, já que  $b = 1, 2, 3$  ou  $4$ .

Se  $b \neq d$ , fazendo todas as possíveis substituições para  $b$  e  $d$  em  $b^2 + d^2 + bd$ , obtemos:

$$1^2 + 2^2 + 1 \times 2 = 7, \quad 1^2 + 3^2 + 1 \times 3 = 13, \quad 1^2 + 4^2 + 1 \times 4 = 21, \\ 2^2 + 3^2 + 2 \times 3 = 19, \quad 2^2 + 4^2 + 2 \times 4 = 28, \quad 3^2 + 4^2 + 3 \times 4 = 37.$$

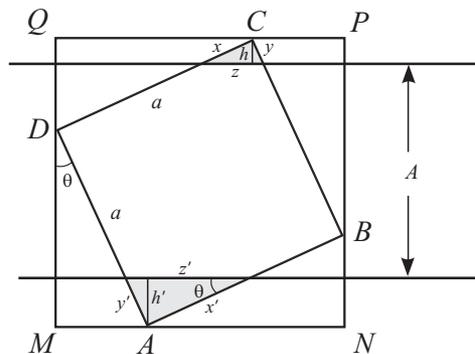
Como nenhum dos resultados é divisível por 5, concluímos que  $b = d = 0$  e, portanto,  $x$  e  $y$  são múltiplos de 5.

### 5.

Consideremos o quadrado  $MNPQ$ , com lados paralelos às retas paralelas dadas e contendo os vértices  $ABCD$ , como na figura. Se  $\theta$  é o ângulo indicado, então  $DQ = a \operatorname{sen} \theta$  e  $MD = a \operatorname{cos} \theta$ .

Logo, a medida dos lados do quadrado  $MNPQ$  é igual a  $a \operatorname{sen} \theta + a \operatorname{cos} \theta$ .

Indicando por  $z$  e  $z'$  as hipotenusas dos triângulos sombreados e por  $h$  e  $h'$  as alturas desses triângulos, temos:



$h + h' + a = a \operatorname{sen} \theta + a \operatorname{cos} \theta$  ou  $h + h' = a(\operatorname{sen} \theta + \operatorname{cos} \theta - 1)$ . Por outro lado,  $z \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta = h$  e  $z' \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta = h'$  ou  $z + z' = \frac{h + h'}{\operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta}$ . Sendo  $x, y, x'$  e  $y'$  os catetos indicados na figura, temos

$$x = \frac{h}{\operatorname{sen} \theta} \quad \text{e} \quad x' = \frac{h'}{\operatorname{sen} \theta}, \quad \text{o que implica} \quad x + x' = \frac{h + h'}{\operatorname{sen} \theta};$$



$$y = \frac{h}{\cos\theta} \quad \text{e} \quad y' = \frac{h'}{\cos\theta}, \quad \text{o que implica} \quad y + y' = \frac{h + h'}{\cos\theta}.$$

A soma,  $s$ , dos perímetros dos triângulos sombreados será:

$$s = x + x' + y + y' + z + z'$$

$$\begin{aligned} s &= \frac{h+h'}{\sin\theta} + \frac{h+h'}{\cos\theta} + \frac{h+h'}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{(h+h')(\sin\theta + \cos\theta + 1)}{\sin\theta\cos\theta} \\ s &= \frac{a(\sin\theta + \cos\theta - 1)(\sin\theta + \cos\theta + 1)}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{a[(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 1]}{\sin\theta\cos\theta} \\ s &= \frac{a \cdot 2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} \Rightarrow s = 2a. \end{aligned}$$

**6.**

Dois naturais  $m$  e  $n$  resolvem  $n2^{n-1} + 1 = m^2$  se e só se  $m = 2k + 1$  e  $n2^{n-3} = k(k + 1)$  (\*) para algum natural  $k$ .

É fácil verificar diretamente que, para  $0 \leq n \leq 6$ , as únicas soluções do problema são  $(n, m) = (0, 1)$  e  $(n, m) = (5, 9)$ .

Mostremos que, para  $n \geq 7$ , não existe solução.

De fato, observe em (\*) que  $2^{n-3}$  divide  $k$  ou  $k + 1$ .

- Se  $2^{n-3}$  divide  $k + 1$ , então  $k$  divide  $n$  e

$$\frac{n}{k} = \frac{k+1}{2^{n-3}} \Rightarrow n \geq k \quad \text{e} \quad k+1 \geq 2^{n-3} \Rightarrow n+1 \geq 2^{n-3}.$$

- Se  $2^{n-3}$  divide  $k$ , então  $k + 1$  divide  $n$  e

$$\frac{n}{k+1} = \frac{k}{2^{n-3}} \Rightarrow n \geq k+1 \quad \text{e} \quad k \geq 2^{n-3} \Rightarrow n \geq 2^{n-3} + 1.$$

Porém, é fácil ver, por indução, que  $n + 1 < 2^{n-3}$  para  $n \geq 7$ .

**7.**

Seja  $x = JC$ , de modo que  $AC = 3x$ . No triângulo retângulo  $\Delta ACC'$ , temos que a medida do ângulo  $C'AC$  é igual a  $60^\circ$  e, portanto, a medida do ângulo  $ACC'$  é igual a  $30^\circ$ . Como  $JH = JC$ , temos o ângulo  $JHC$  igual a  $30^\circ$ ; logo, o ângulo  $HJB'$  mede  $60^\circ$ .



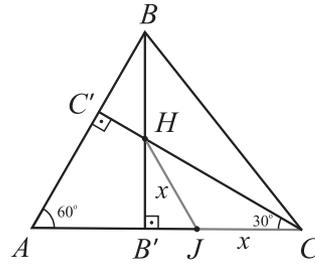
Portanto,  $B'J = HJ \cos 60^\circ = \frac{x}{2}$ ,

implicando  $CB' = x + \frac{x}{2} = \frac{3x}{2} = \frac{AC}{2}$ , isto

é,  $B'$  é ponto médio de  $\overline{AC}$ .

Logo,  $\overline{BB'}$  é simultaneamente altura e mediana do  $\triangle ABC$ , que é, portanto,

isósceles com  $AB = BC$ . Portanto,  $\widehat{C} = \widehat{A} = 60^\circ$ , o que mostra que  $\triangle ABC$  é de fato equilátero.



### 8.

Como  $x^2 + 1$  tem grau 2, temos que o resto da divisão de  $p(x)$  por  $x^2 + 1$  tem a forma  $ax + b$  com  $a, b \in \mathbb{C}$ . Temos, portanto,

$$p(x) = (x^2 + 1)q(x) + ax + b.$$

Fazendo  $x = i$  e  $x = -i$ , obtemos

$$\begin{cases} p(i) = ai + b \\ p(-i) = -ai + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{p(i) - p(-i)}{2i} \\ b = \frac{p(i) + p(-i)}{2} \end{cases}.$$

Pela fórmula de Moivre, temos

$$p(i) = \left( \cos \frac{2\pi}{2007} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{2007} \right)^{2007} = \cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi = 1 \text{ e}$$

$$p(-i) = \left( \cos \frac{2\pi}{2007} - i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{2007} \right)^{2007} = \left[ \cos \left( \frac{-2\pi}{2007} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{-2\pi}{2007} \right) \right]^{2007} = 1.$$

Substituindo nas expressões de  $a$  e  $b$ , temos  $a = 0$  e  $b = 1$ , isto é, o resto da divisão é 1.

### 9.

Na figura a seguir, seja  $M$  o ponto de intersecção de  $\overline{XY}$  e  $\overline{CA'}$ . Como  $\overline{MC}$  é perpendicular a  $\overline{AB}$ , temos que  $\overline{MC'}$  é perpendicular a  $\overline{A'B'}$ . Vamos mostrar primeiramente que  $A, M$  e  $C'$  são colineares,



e que, portanto,  $\overline{AC'}$  é perpendicular a  $\overline{A'B'}$ . Para isso, basta mostrar que  $m(\widehat{AMC}) = m(\widehat{A'MC'})$ . Como  $X\widehat{A'C'}$  é reto, temos

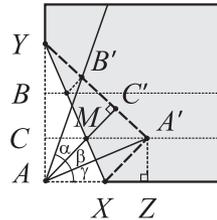
$$m(\widehat{A'MC'}) = 90^\circ - m(\widehat{M\hat{A}'C'}) = m(\widehat{M\hat{A}'X}).$$

Agora, como  $MA = MA'$  e  $XA = XA'$ , temos que  $\triangle AMA'$  e  $\triangle AXA'$  são isósceles e assim  $m(\widehat{M\hat{A}'X}) = m(\widehat{M\hat{A}X})$ .

Mas  $m(\widehat{M\hat{A}X}) = m(\widehat{AMC})$ , pois  $\overline{A'C}$  é paralelo a  $\overline{AZ}$ , o que mostra que  $m(\widehat{AMC}) = m(\widehat{A'MC'})$ .

Assim, os triângulos  $\triangle AC'B'$  e  $\triangle AC'A'$  são congruentes pelo caso de congruência LAL, já que  $B'C' = BC = AC = A'C'$  e o ângulo  $C'$  é reto. Logo,  $\alpha = \beta$ , pois são ângulos correspondentes.

Os triângulos  $\triangle AC'A'$  e  $\triangle AZA'$  são congruentes pelo caso especial cateto-hipotenusa, pois  $A'C' = A'Z$ . Logo,  $\beta = \gamma$  e, portanto,  $\alpha = \beta = \gamma$ , ou seja, o ângulo  $\theta$  foi dividido em 3 partes iguais.



## 10.

Sendo  $f: N \rightarrow N$  tal que  $f(f(x)) = x, \forall x \in N$ , temos:

a)  $f$  é injetora, pois, se  $f(x_1) = f(x_2)$ , então  $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ , isto é,  $x_1 = x_2$ . Temos também  $f$  sobrejetora, pois, dado  $y \in N$ , seja  $x = f(y) \in N$  e então  $f(x) = f(f(y)) = y$ .

b) A função  $f: N \rightarrow N$  dada por  $f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{se } n \text{ é par} \\ n-1, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

obedece à condição  $f(f(n)) = n, \forall n \in N$ , no caso em que

$N = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ . E no caso que  $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ , basta tomar  $f(n) = n - 1$ , se  $n$  é par e  $f(n) = n + 1$ , se  $n$  é ímpar.

### Observação

Existem diversas outras soluções. Por exemplo, sejam

$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  e  $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$  conjuntos de uma partição qual-



quer de  $N$  (isto é,  $A \cup B = N$  e  $A \cap B = \emptyset$ ). Basta então definir  $f(a_i) = b_i$  e  $f(b_i) = a_i$ ,  $i$  natural. A solução apresentada corresponde à partição de  $N$  nos conjuntos  $A$  e  $B$  dos números pares e ímpares, respectivamente.

### 11.

Sejam  $M_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , cada uma das moedas,

$P_i = \frac{1}{2i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , a probabilidade de se obter cara jogando a moeda  $M_i$  e  $PT_i$  a probabilidade de haver um número ímpar de caras jogando-se as moedas  $M_1, M_2, \dots, M_i$ .

Queremos achar  $PT_{2007}$ .

Para  $i = 1$ , temos que  $PT_1 = P_1 = \frac{1}{3}$ , pois é a probabilidade de haver 1 cara no lançamento de  $M_1$ .

Para  $i = 2$ , temos que  $PT_2$  é a probabilidade de  $M_1$  ser cara e  $M_2$  ser coroa ou  $M_1$  ser coroa e  $M_2$  ser cara:  $PT_2 = P_1(1 - P_2) + (1 - P_1)P_2$ .

$$PT_2 = \frac{1}{3} \cdot (1 - \frac{1}{5}) + (1 - \frac{1}{3}) \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{15} + \frac{2}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

Sendo  $PT_1 = \frac{1}{3}$  e  $PT_2 = \frac{2}{5}$ , parece que  $PT_n = \frac{n}{2n+1}$ . Vamos tentar provar essa igualdade pelo princípio da indução finita.

$$\text{Tese: } PT_n = \frac{n}{2n+1}. \quad \text{Hipótese: } PT_{n-1} = \frac{(n-1)}{2(n-1)+1}.$$

Temos  $PT_{n-1} = \frac{(n-1)}{2(n-1)+1} = \frac{n-1}{2n-2+1} = \frac{n-1}{2n-1}$ . Porém,  $PT_n$  é a

probabilidade de haver um número ímpar de caras em  $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$  e  $M_n$  ser coroa ou haver um número par de caras em  $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$  e  $M_n$  ser cara. Portanto,  $PT_n = PT_{n-1}(1 - P_n) + (1 - PT_{n-1})P_n$  ou

$$PT_n = (\frac{n-1}{2n-1})(1 - \frac{1}{2n+1}) + [1 - (\frac{n-1}{2n-1})](\frac{1}{2n+1}) = \frac{n}{2n+1}.$$

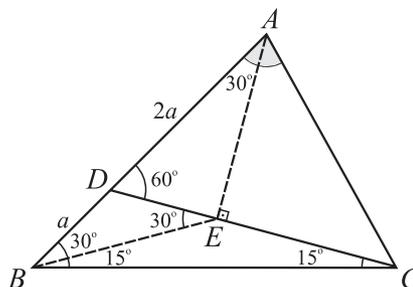


Portanto,  $PT_{2007} = \frac{2007}{2(2007)+1} = \frac{2007}{4015}$ .

**12.**

Traçamos a perpendicular à reta  $CD$ , por  $A$ , que corta o segmento  $CD$  no ponto  $E$ , pois  $\widehat{ADC}$  é agudo (mede  $60^\circ$ ).

O  $\triangle BDE$  é isósceles, pois  $DE = 2a \cos 60^\circ = a = BD$ . Logo, o  $\triangle BEC$  é isósceles, pois  $\widehat{EBC}$  mede  $15^\circ$  e, portanto,  $BE = EC$ . Além disso,  $BE = AE$ , pois  $\triangle BEA$  é isósceles, já que  $\widehat{ABE}$  e  $\widehat{BAE}$  medem  $30^\circ$ . Logo,  $AE = EC$  e o  $\triangle AEC$  é isósceles com  $\widehat{EAC}$  medindo  $45^\circ$ . Assim,  $\alpha = 75^\circ$ .



**Observações**

1. No *site* [www.gogeometry.com](http://www.gogeometry.com) é possível encontrar outros problemas desse tipo.
2. Este problema também pode ser resolvido utilizando-se a lei dos senos ou dos cossenos. Que tal tentar?

**13.**

Para que a equação  $\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = \sqrt{2}$  tenha solução real é necessário que  $2x - 1 \geq 0$ , isto é,  $x \geq \frac{1}{2}$ . Nesse caso, o primeiro

radicando é sempre positivo e para ver que  $x \geq \sqrt{2x - 1}$  basta observar que:  $(x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 2x - 1 \Rightarrow \sqrt{x^2} \geq \sqrt{2x - 1} \Rightarrow |x| = x \geq \sqrt{2x - 1}$ .

Para  $x \geq 1/2$ , tem-se:  $x$  é solução da equação se e somente se

$$(\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}})^2 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2} = 1 - x \Leftrightarrow |x - 1| = 1 - x$$

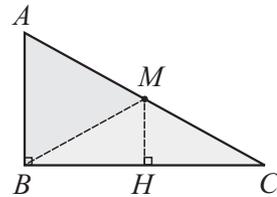
$$\Leftrightarrow |1 - x| = 1 - x \Leftrightarrow 1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1.$$

Logo, o conjunto solução da equação é o intervalo  $S = [1/2, 1]$ .



14.

- a) No  $\Delta ABC$ , retângulo em  $B$ ,  $M$  é o ponto médio de  $AC$  e  $MH$  é perpendicular a  $BC$ . Como  $BH = HC$ , o  $\Delta BMH$  e o  $\Delta CMH$  são congruentes e, portanto,  $BM = MC = AM$ . Assim, todo triângulo retângulo pode ser decomposto em dois triângulos isósceles  $\Delta ABM$  e  $\Delta BMC$ .

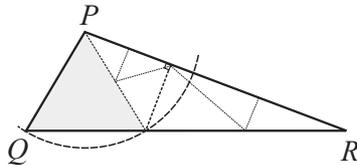


- b) Dado um  $\Delta PQR$ , qualquer, traçamos uma altura interna que o decompõe em dois triângulos retângulos. Usando a), vemos que o  $\Delta PQR$  pode ser decomposto em  $n = 4$  triângulos isósceles. Repetindo o procedimento em um, dois, três ou quatro desses triângulos, decompõe-se o  $\Delta PQR$  em sete, dez, treze ou dezesseis triângulos isósceles (que passaremos a chamar de partes). E assim por diante, o  $\Delta PQR$  pode ser decomposto em  $n = 4 + 3k$  partes,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

Para decompor em  $n = 5$  partes, consideremos dois casos:

- i)  $\Delta PQR$  não é equilátero.

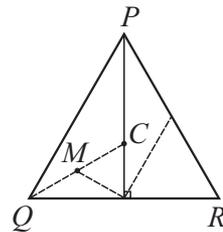
Decompomos o triângulo em dois triângulos, um deles isósceles, e aplicamos a) no outro (dividido em dois triângulos retângulos), obtendo 5 partes.



Repetindo o procedimento de a) em uma, duas, três, quatro ou cinco partes, decompõe-se o  $\Delta PQR$  em oito, onze, catorze, dezessete ou vinte partes. E assim, em  $n = 5 + 3k$  partes,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

- ii)  $\Delta PQR$  é equilátero.

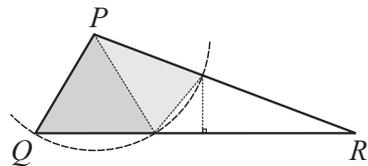
Uma altura separa o  $\Delta PQR$  em dois triângulos retângulos. Num deles aplicamos a), obtendo duas partes, e decompomos o outro num triângulo isósceles e outro retângulo com vértice comum no circuncentro  $C$  do  $\Delta PQR$ . Aplicando a) nesse triângulo retângulo, decompõe-se o  $\Delta PQR$  em  $n = 5$  partes. Como em i),



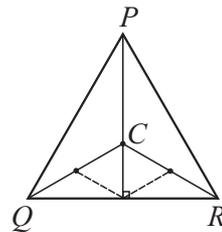


mostra-se que é possível decompor o  $\Delta PQR$  em  $n = 5 + 3k$  partes,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

Um  $\Delta PQR$  não equilátero pode ser decomposto em três triângulos, sendo dois isósceles, e aplicando a) no terceiro triângulo (dividido em dois triângulos retângulos), decomparamos o  $\Delta PQR$  em  $n = 6$  partes.



Se  $\Delta PQR$  é equilátero, utilizando o circuncentro  $C$ , decomparamos em três partes, e aplicando a) numa delas obtemos a decomposição em 6 partes. Como nos casos anteriores, o  $\Delta PQR$  pode ser decomposto em  $n = 6 + 3k$  partes,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .



### 15.

A função  $f$  deve satisfazer a igualdade  $2f(x) + f(1-x) = x^{2008}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Escrevendo a igualdade para  $(1-x)$ , obtemos  $2f(1-x) + f(1-(1-x)) = (1-x)^{2008}$ . Então,

$$\begin{cases} 2f(1-x) + f(x) = (1-x)^{2008} \\ 2f(x) + f(1-x) = x^{2008} \end{cases}$$

ou, isolando  $f(1-x)$  na segunda equação e substituindo na primeira,

$$2[x^{2008} - 2f(x)] + f(x) = (1-x)^{2008}, \text{ o que leva a}$$

$$f(x) = \frac{2x^{2008} - (1-x)^{2008}}{3}.$$

É fácil verificar que a última função satisfaz a equação funcional dada, logo é a única solução.

### 16.

Podemos fatorar  $3^{2008} - 1$  da forma seguinte:

$$3^{2008} - 1 = (3^8)^{251} - 1 = (3^8 - 1)(3^{8 \times 250} + 3^{8 \times 249} + 3^{8 \times 248} + \dots + 3^{8 \times 1} + 1).$$

Observe que a soma  $3^{8 \times 250} + 3^{8 \times 249} + 3^{8 \times 248} + \dots + 3^{8 \times 1} + 1$  tem 251



parcelas, todas ímpares; logo, é um número ímpar, não sendo, portanto, divisível por 2. Por outro lado,

$$3^8 - 1 = (3^4 - 1)(3^4 + 1) = 80 \times 82 = 2^5 \times 5 \times 41.$$

Então, a maior potência de 2 que divide  $3^{2008} - 1$  é  $2^5$ .

### 17.

a) Como cada peça na posição  $(i, j)$  é substituída por duas, ocupando as posições  $(i + 1, j)$  e  $(i, j + 1)$ , temos que a soma dos pesos não varia a cada jogada, pois  $2^{-i-j} = 2^{-(i+1)-j} + 2^{-i-(j+1)}$ .

b) Para determinar a soma de todos os pesos do tabuleiro, observamos

que a soma da primeira coluna é  $\frac{1}{1-1/2} = 2$  (PG infinita de razão

$1/2$  e termo inicial 1). Por outro lado, a soma da segunda coluna é metade da primeira, a da terceira,  $1/4$  da primeira, e assim por diante, logo a soma de todos os pesos do tabuleiro é

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{2}{1-1/2} = 4.$$

c) A soma dos pesos das seis casas iniciais sombreadas é

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2 + \frac{3}{4},$$
 enquanto a soma dos pesos das casas

$$\text{não hachuradas é } 4 - (2 + \frac{3}{4}) = 1 + \frac{1}{4}.$$

Assim, é impossível mover as peças das casas hachuradas inicialmente para fora dessa região, uma vez que a soma dos pesos das

casas iniciais  $2 + \frac{3}{4}$  será mantida, em cada jogada, e é maior do que

a soma dos pesos de todas as casas não hachuradas,  $1 + \frac{1}{4}$ .

**Observação:** o problema ainda não teria solução caso as peças iniciais ocupassem apenas as casas de pesos 1,  $1/2$ ,  $1/2$ , já que para atingir o peso 2 da região não hachurada é necessário utilizar infinitas casas. Logo, o jogo não terminaria após um número finito de movimentos.



18.

$$\begin{aligned} \text{Temos } p &= \prod_{2 \leq n \leq 2008} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \prod_{2 \leq n \leq 2008} \frac{(n-1)(n^2 + n + 1)}{(n+1)(n^2 - n + 1)} \\ &= \prod_{2 \leq n \leq 2008} \frac{n-1}{n+1} \cdot \prod_{2 \leq n \leq 2008} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1}. \end{aligned}$$

Por um lado, temos

$$(1) \quad \prod_{2 \leq n \leq 2008} \frac{n-1}{n+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdots \frac{2006}{2008} \cdot \frac{2007}{2009} = \frac{1.2}{2008.2009}.$$

Por outro lado, se  $g(n) = n^2 - n + 1$ , temos que

$$g(n+1) = (n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + n + 1 \text{ e assim}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \prod_{2 \leq n \leq 2008} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1} &= \prod_{2 \leq n \leq 2008} \frac{g(n+1)}{g(n)} = \frac{g(3)}{g(2)} \cdot \frac{g(4)}{g(3)} \cdots \frac{g(2009)}{g(2008)} \\ &= \frac{g(2009)}{g(2)} = \frac{2009^2 - 2009 + 1}{2^2 - 2 + 1}. \end{aligned}$$

De (1) e (2), concluímos que

$$\begin{aligned} p &= \frac{1.2}{2008.2009} \cdot \frac{2009^2 - 2009 + 1}{2^2 - 2 + 1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2009.2008 + 1}{2008.2009} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2008.2009}\right). \end{aligned}$$

19.

Observe inicialmente que, sendo 7 um número primo que divide  $N$ , então necessariamente ele deve dividir algum dos fatores inteiros  $(x + 6y)$ ,  $(2x + 5y)$  ou  $(3x + 4y)$ . Mas então observe as relações abaixo:

$$\begin{cases} 3(2x + 5y) + (x + 6y) = 7(x + 3y) \\ 2(3x + 4y) + (x + 6y) = 7(x + 2y) \\ 2(2x + 5y) + (3x + 4y) = 7(x + 2y) \end{cases}$$

Se algum dos fatores for múltiplo de 7, elas implicam que os outros também são, portanto  $N$  é divisível por  $7^3 = 343$ .



**20.**

Suponhamos que exista um ângulo  $\widehat{AOB}$  tal que  $AO = BO$ ,  $AC = CD = BD$  com os ângulos  $\widehat{AOC}$ ,  $\widehat{COD}$  e  $\widehat{BOD}$  congruentes. No  $\Delta AOD$ , a ceviana  $OC$  é mediana e bissetriz; logo, é também a altura e o ângulo  $\widehat{ACO}$  é reto. No  $\Delta COB$ , a ceviana  $OD$  é mediana e bissetriz; logo, é também a altura e o ângulo  $\widehat{ODC}$  é reto. Assim, o  $\Delta DOC$  tem dois ângulos retos, o que é um absurdo.

# **RPM**

## **Sociedade Brasileira de Matemática**

Presidente: *Marcelo Viana*

Vice-Presidente: *Vanderlei Horita*

Primeiro Secretário: *Ali Tahzibi*

Segundo Secretário: *Luiz Manoel de Figueiredo*

Terceiro Secretário: *Marcela Souza*

Tesoureiro: *Carmen Mathias*

## **Comitê Editorial da RPM**

Ana Catarina P. Hellmeister (editora executiva)

Alberto Carvalho P. de Azevedo

Antônio Luiz Pereira

Eduardo Wagner

Elon Lages Lima

José Luiz Pastore Mello

José Paulo Q. Carneiro

Maria Elisa E. L. Galvão

Paulo Cezar Pinto Carvalho

Renate G. Watanabe

**Seleção e Organização:** Comitê Editorial da RPM

**Diagramação e Ilustração:** Silvana Cunha V. Castro

## **RPM – Revista do Professor de Matemática**

Estrada Dona Castorina, 110 sala 109

Jardim Botânico

Rio de Janeiro - RJ

22460-320

[www.rpm.org.br](http://www.rpm.org.br)

[rpm@sbm.org.br](mailto:rpm@sbm.org.br)

telefone/fax: (21)2529-5065